MathVision : Jurnal Matematika
September 2024 Volume 06 Issue 02 Page 94–98
P-ISSN: 2656-6303 E-ISSN: 2656-9876
https://doi.org/10.55719/mv.v6i2.1280

BEBERAPA GENERALISASI TEOREMA TITIK TETAP CARISTI UNTUK JARAK-ω

Ahmad Khairul Umam [1*], Pukky Tetralian Bantining Ngastiti [2], Ahmad Isro'il [3]

[1,2,3]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Billfath*
Komplek PP. Al Fattah Siman Sekaran, Lamongan, 62261, Indonesia

*Email: * **ahmad.khairul.umam@gmail.com***

Riwayat Artikel:

Tanggal Masuk	*05-07-2024y*
Revisi	*20-07-2024*
Diterima	*13-08-2024*

Kata Kunci:

Titik Tetap Caristi;
Jarak-ω;
fungsi nondecreasing

ABSTRAK

Teorema titik tetap Caristi merupakan generalisasi dari titik tetap Banach. Teorema titik tetap Banach menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap di ruang yang lengkap dan fungsi kontraktif. Titik tetap Caristi menggunakan fungsi $f:X\to X$ dan fungsi lower semicontinuous $\psi:X\to[0,\infty)$. Pada penelitian ini didiskusikan beberapa generalisasi teorema titik tetap Caristi menggunakan jarak-ω sebagai fungsi jarak. Fungsi yang digunakan yaitu fungsi $T:X\to 2^X$ dimana 2^X maksudnya adalah semua koleksi himpunan bagian tak kosong dari himpunan X. Selain itu juga dipakai fungsi $c:[0,\infty)\to(0,\infty)$ yang merupakan fungsi nondecreasing.

Cara mengutip artikel ini:

Ahmad Khairul Umam, Pukky Tetralian Bantining Ngastiti, Ahmad Isro'il, "BEBERAPA GENERALISASI TEOREMA TITIK TETAP CARISTI UNTUK JARAK-ω," *MathVision: Jurnal Matematika.*, vol. 06, iss. 02, pp. 94-98, 2024.

KONTAK:
Ahmad Khairul Umam ahmad.khairul.umam@gmail.com Program Studi Matematika FMIPA Universitas Billfath

Artikelnya dapat diakses di sini. *https://doi.org/10.55719/mv.v6i2.1280*

1. PENDAHULUAN

Banyak ilmuwan matematika yang mempelajari titik tetap akhir-akhir ini. Prinsip titik tetap berguna dalam menyelesaikan masalah persamaan linear, persamaan differensial, dan persamaan integral [1]. Di dalam penelitian ini membahas beberapa teorema yang merupakan generalisasi dari teorema titik tetap Caristi. Fungsi jarak yang digunakan adalah fungsi jarak-ω.

Teorema titik tetap Caristi merupakan perluasan dari titik tetap Banach. Teorema titik tetap Banach menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk fungsi yang terdifinisi dalam ruang lengkap dan fungsi yang kontraktif [2]. Di dalam teorema Caristi, selain menggunakan fungsi $f : X \to X$ juga menggunakan fungsi $\psi : X \to [0, \infty)$ yang merupakan fungsi *lower semicontinuous.*

Di dalam penelitian ini menggunakan fungsi bernilai himpunan $T : X \to 2^X$, dimana 2^X maksudnya adalah semua koleksi himpunan bagian tak kosong dari himpunan X. Fungsi bernilai himpunan dapat diterapkan pada bidang teori kontrol, teori permainan, dan lain sebagainya [3], [4]. Selain itu, juga dipakai fungsi $c : [0, \infty) \to (0, \infty)$ yang merupakan fungsi *nondecreasing.*

Definisi 1 [5]. *Fungsi f dari himpunan A kedalam himpunan B, ditulis $f: A \to B$ adalah suatu pengawanan (pemetaan) sedemikian sehingga untuk setiap elemen $x \in A$ dikawankan secara tunggal dengan elemen $y \in B$, ditulis $y = f(x)$ dan $f(x)$ dinamakan nilai f di x.*

Definisi 2 [6]. *Diberikan himpunan tidak kosong X. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ disebut metrik pada X jika memenuhi aksioma-aksioma:*
M1. $d(x, y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$;
M2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$;
M3. $d(x, y) = d(y, x)$ untuk setiap $x, y \in X$;
M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap x, y dan $z \in X$.
Himpunan X yang dilengkapi dengan fungsi jarak d, disebut ruang metrik dan dinyatakan dengan (X, d).

Definisi 3 [7]. *Sebuah barisan bilangan real adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap bilangan asli n dengan sebuah bilangan real tunggal x_n. Di sini x_n disebut sebagai suku ke-n barisan tersebut. Notasi $\langle x_n \rangle$ menyatakan barisan dengan suku ke-n x_n.*

Definisi 4 [8]. *Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sedimikian rupa sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku*

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Definisi 5 [9]. *Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definisi 6 [10]. *Ruang Metrik (X, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalam X konvergen ke titik di X.*

Definisi 7 [11]. *Diberikan ruang metrik (X, d). Fungsi $\psi : X \to \mathbb{R}$ disebut lower semicontinuous jika untuk setiap $y \in X$ berlaku*

$$\liminf_{x \to y} \psi(x) \geq \psi(y).$$

Definisi 8 [12]. *Fungsi $\omega : X \times X \to [0, \infty)$ adalah jarak-ω di X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:*
w_1. $\omega(x, z) \leq \omega(x, y) + \omega(y, z)$
w_2. Pemetaan $\omega(x, \cdot): X \to [0, \infty)$ adalah lower semicontinous
w_3. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $\omega(z, x) \leq \delta$ dan $\omega(z, y) < \delta$ berlaku $d(x, y) < \varepsilon$.

Definisi 9 [13]. *Diberikan ruang metrik (X, d) dan suatu pemetaan $f: X \to X$. Titik $x \in X$ disebut titik tetap f jika $x = f(x)$.*

Teorema 1 [14]. *Diberikan ruang metrik lengkap X dengan metrik d. Fungsi $\psi : X \to [0,\infty)$ adalah fungsi lower semicontinous, dan $f: X \to X$ adalah fungsi yang bernilai tunggal sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$*

$$d\big(x, f(x)\big) \leq \psi(x) - \psi\big(f(x)\big),$$

maka f memiliki titik tetap.

Teorema 2 [15]. *Diberikan fungsi $f: X \to X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku*

$$\psi\big(f(x)\big) + \omega\big(x, f(x)\big) \leq \psi(x).$$

Maka terdapat $x_0 \in X$ sedemikian sehingga $f(x_0) = x_0$ dan $\omega(x_0, x_0) = 0$.

2. METODE

2.1 Desain Penelitian

Penelitian ini adalah penelitian dasar. Penelitian dasar merupakan suatu penelitian untuk menemukan suatu generalisasi teori atau prinsip tertentu untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Penelitian ini adalah penelitian studi pustaka. Metode studi pustaka adalah suatu metode penelitian yang mengumpulkan informasi secara mendalam melalui berbagai literatur, buku, jurnal/artikel, referensi lainnya, serta hasil penelitian sebelumnya yang relevan, untuk mendapatkan jawaban dan landasan teori mengenai masalah yang akan diteliti.

2.2 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitiannya adalah:

1. Mencari jurnal utama penelitian. Pada jurnal utama terdapat teori/teorema baru yang dibuktikan secara singkat oleh penulis.
2. Mencari beberapa pustaka yang relevan dengan penelitian. Hal tersebut dilakukan untuk menambah pemahaman tentang teorema baru dan pembuktiannya.
3. Menjelaskan tentang penelitian-penelitian sebelumnya yang berhubungan dengan penelitian ini. Dicantumkan definisi dan teorema untuk mendukung pembuktian teorema baru.
4. Membuktikan teorema-teorema penelitian. Sebenarnya teorema baru tersebut sudah dibuktikan, akan tetapi buktinya ditulis singkat. Pada hasil dan pembahasan ditambahkan proses bukti teorema-teorema agar lebih mudah dipahami oleh pembaca.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Teorema 3. *Diberikan fungsi $g: X \to (0,\infty)$ dimana $sup\left\{g(x): x \in X, \psi(x) \leq \inf_{z\in X} \psi(z) + r\right\} < \infty$ untuk $r > 0$ dan fungsi $\psi: X \to [0,\infty)$ adalah fungsi lower semicontinous. Diberikan juga fungsi $T: X \to 2^X$ dimana 2^X adalah koleksi semua himpunan tak kosong dari X sedemikan sehingga untuk setiap $x \in X$ terdapat $y \in T(x)$ yang memenuhi $\omega(x, y) \leq g(x)\big(\psi(x) - \psi(y)\big)$. Maka fungsi T memiliki titik tetap $x_0 \in X$ sedemikian sehingga $\omega(x_0, x_0) = 0$.*

Bukti. Didefinisikan fungsi $f(x) = y \in T(x) \subseteq X$ dimana $f: X \to X$. Karena diketahui

$$\omega(x, y) \leq g(x)\big(\psi(x) - \psi(y)\big)$$

maka untuk setiap $x \in X$, bisa ditulis

$$\omega\big(x, f(x)\big) \leq g(x)\Big(\psi(x) - \psi\big(f(x)\big)\Big). \tag{1}$$

Dari pertidaksamaan (1), yaitu

$$\omega\big(x, f(x)\big) \leq g(x)\Big(\psi(x) - \psi\big(f(x)\big)\Big)$$

di ruas sebelah kiri, fungsi jarak ω bernilai $[0,\infty)$ dan di ruas kanan $g(x) > 0$ maka haruslah $\psi(x) - \psi\big(f(x)\big) \geq 0$ atau bisa ditulis $\psi(x) \geq \psi\big(f(x)\big)$ atau

$$\psi\big(f(x)\big) \leq \psi(x). \tag{2}$$

Misalkan

$$M = \left\{x \in X: \psi(x) \leq \inf_{z\in X} \psi(z) + r\right\} \tag{3}$$

dan

$$a = \sup_{z \in M} g(z) < \infty. \quad (4)$$

Karena fungsi ψ dan $\omega(x,.)$ adalah fungsi *lower semicontinuous* maka M adalah himpunan bagian tertutup dari ruang metrik lengkap X. Diberikan $u \in M$ dan $f(u) = v \in T(u)$, dari (2) dan (3) menjadi

$$\psi(f(u)) \leq \psi(u) \leq \inf_{z \in X} \psi(z) + r$$

dimana $f(u) \in M$. Karena $a\psi$ adalah fungsi *lower semicontinuous*, dari pertidaksamaan (1) yaitu

$$\omega(x, f(x)) \leq g(x)\left(\psi(x) - \psi(f(x))\right)$$

dan dari (4), menjadi

$$\omega(x, f(x)) \leq a\left(\psi(x) - \psi(f(x))\right)$$

$$\omega(x, f(x)) \leq a\psi(x) - a\psi(f(x)). \quad (5)$$

Menggunakan teorema 2 didapatkan $x_0 \in M$ sedemikian sehingga $f(x_0) = x_0 \in T(x_0)$ dan dari pertidaksamaan (5) yaitu

$$\omega(x, f(x)) \leq a\psi(x) - a\psi(f(x))$$

dengan $x = x_0$ dan $f(x) = x_0$, menjadi

$$\omega(x_0, x_0) \leq \alpha\psi(x_0) - \alpha\psi(x_0) = 0.$$

Karena fungsi jarak ω bernilai $[0,\infty)$, maka $\omega(x_0, x_0) = 0$.

Teorema 4. *Diberikan fungsi* $\psi: X \to [0,\infty)$ *adalah fungsi lower semicontinous dan fungsi* $T: X \to 2^X$ *dimana* 2^X *adalah koleksi semua himpunan tak kosong dari* X *sedemikan sehingga untuk setiap* $x \in X$ *terdapat* $y \in T(x)$ *yang memenuhi* $\omega(x,y) \leq c(\psi(x))(\psi(x) - \psi(y))$ *dimana* $c: [0,\infty) \to (0,\infty)$ *adalah fungsi nondecreasing. Maka fungsi* T *memiliki titik tetap* $x_0 \in X$ *sedemikian sehingga* $\omega(x_0, x_0) = 0$.

Bukti. Untuk setiap $x \in X$, definisikan $g(x) = c(\psi(x))$. Berdasarkan $c: [0,\infty) \to (0,\infty)$ maka fungsi g memetakan x ke $(0,\infty)$. Karena c adalah fungsi *nondecreasing*, maka untuk setiap bilangan real $r > 0$ diperoleh

$$\sup\left\{g(x): x \in X, \psi(x) \leq \inf_{z \in X} \psi(z) + r\right\} \leq c(\inf_{z \in X} \psi(z) + r) < \infty.$$

dari teorema 3 didapatkan fungsi T memiliki titik tetap $x_0 \in X$ sedemikian sehingga $\omega(x_0, x_0) = 0$.

Akibat 1. *Diberikan fungsi* $\psi: X \to [0,\infty)$ *adalah fungsi lower semicontinous dan fungsi* $T: X \to 2^X$ *dimana* 2^X *adalah koleksi semua himpunan tak kosong dari* X *sedemikan sehingga untuk setiap* $x \in X$ *terdapat* $y \in T(x)$ *yang memenuhi* $\omega(x,y) \leq c(\psi(y))(\psi(x) - \psi(y))$ *dimana* $c: [0,\infty) \to (0,\infty)$ *adalah fungsi nondecreasing. Maka fungsi* T *memiliki titik tetap* $x_0 \in X$ *sedemikian sehingga* $\omega(x_0, x_0) = 0$.

Bukti. Untuk setiap $x \in X$ terdapat $y \in T(x)$ yang memenuhi

$$\omega(x,y) \leq c(\psi(y))(\psi(x) - \psi(y))$$

Karena $\omega \geq 0$ dan $c > 0$, maka haruslah $\psi(x) - \psi(y) \geq 0$ atau bisa ditulis $\psi(x) \geq \psi(y)$ atau $\psi(y) \leq \psi(x)$. Karena c adalah fungsi *nondecreasing*, maka $c(\psi(y)) \leq c(\psi(x))$. Dari teorema 4 didapatkan fungsi T memiliki titik tetap $x_0 \in X$ sedemikian sehingga $\omega(x_0, x_0) = 0$.

4. KESIMPULAN

Teorema titik tetap memiliki banyak generalisasi. Teorema titik tetap yang terkenal adalah teorema titik tetap Banach. Teorema titik tetap Banach menjamin eksistensi dan ketunggalan titik tetap untuk fungsi yang terdifinisi dalam ruang lengkap dan fungsi yang kontraktif. Teorema titik tetap Caristi merupakan perluasan dari teorema titik tetap Banach. Di dalam teorema titik tetap Caristi, selain menggunakan fungsi $f : X \to X$ juga menggunakan fungsi $\psi : X \to [0,\infty)$ yang merupakan fungsi *lower semicontinuous*. Di teorema titik tetap Banach memiliki syarat $d(f(x), f(y)) \leq cd(x,y), \forall x,y \in X$ dimana $0 \leq c < 1$. Sedangkan di teorema titik tetap Caristi memiliki syarat $d(x, f(x)) \leq \psi(x) - \psi(f(x)), \forall x \in X$.

Beberapa teorema di pembahasan adalah generalisasi dari teorema titik tetap Caristi. Fungsi jarak yang digunakan adalah fungsi jarak-ω. Fungsi yang digunakan yaitu fungsi $T : X \to 2^X$, dimana 2^X maksudnya adalah semua koleksi himpunan bagian tak kosong dari himpunan X. Selain itu, juga dipakai fungsi $c : [0,\infty) \to (0,\infty)$ yang merupakan fungsi *nondecreasing*. Setelah itu ditambahkan beberapa sifat di masing-masing teorema sehingga fungsi T memiliki titik tetap $x_0 \in X$ sedemikian sehingga $\omega(x_0, x_0) = 0$.

Di teorema 3 memiliki syarat $\omega(x,y) \leq g(x)\big(\psi(x) - \psi(y)\big), \forall x \in X$ dimana $y \in T(x)$. Sedangkan di teorema 4 memiliki syarat $\omega(x,y) \leq c\big(\psi(x)\big)\big(\psi(x) - \psi(y)\big), \forall x \in X$ dimana $y \in T(x)$ dan $c: [0,\infty) \to (0,\infty)$ adalah fungsi *nondecreasing*. Selanjutnya di akibat 1 memiliki syarat $\omega(x,y) \leq c\big(\psi(y)\big)\big(\psi(x) - \psi(y)\big), \forall x \in X$ dimana $y \in T(x)$ dan $c: [0,\infty) \to (0,\infty)$ adalah fungsi *nondecreasing*.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masayakat (LPPM) Universitas Billfath atas dana yang diberikan.

REFERENSI

[1] E. Kreyszig, "Introductory Functional Analysis with Applications," John Wiley & Sons, 1978.

[2] S. Oltra and O. Valero, "Banach's Fixed Point Theorem for Partial Metric Spaces," *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, vol. 36, pp. 17-26, 2004.

[3] A. Khan, M. Sarwar, F. Khan, H. Alsamir, and H. A. Hammad, "Fixed Point Results for Multivalued Mappings with Applications," *Journal of Function Spaces*, vol. 2021, pp. 1-10, 2021.

[4] M. Muslikh dan S. Fitri, "Fungsi Bernilai Himpunan," UB Press, 2022.

[5] M. Muslikh, "Analisis Real," UB Press, 2012.

[6] A. K. Umam, "Buku Ajar Mata Kuliah Analisis Real," YPSIM Banten, 2021.

[7] H. Gunawan, "Pengantar Analisis Real," Penerbit ITB, 2016.

[8] I. S. Rohma dan A. K. Umam, "Eksistensi dan Ketunggalan Titik Tetap Bersama di Ruang Metrik *Cone* (Kerucut) untuk Pasangan Fungsi Ekspansif," *JMS: Jurnal Matematika dan Sains*, vol. 3, no. 1, pp. 39-44, 2023.

[9] W. Rudin, "Principles of Mathematical Analysis 3rd Edition," McGraw-Hill, Inc., 1976.

[10] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, "Introduction to Real Analysis," John Wiley & Sons, Inc., 2011.

[11] F. V. Kuhlmann, K. Kuhlmann, and M. Paulsen, "The Caristi-Kirk Fixed Point Theorem from The Point of View of Ball Spaces," *J. Fixed Point Theory Appl.*., vol. 20, no. 107, pp. 1-9, 2018.

[12] A. Latif, "Generalized Caristi's Fixed Point Theorems," *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2009, no. 170140, pp. 1-7, 2009.

[13] S. Takashi and Y. Hiroyuki, "Introduction to Mathematical Science Model." Baifukan, 2010.

[14] J. Caristi, "Fixed Point Theorems for Mappings Satisfying Inwardness Conditions," *Transactions of The American Mathematical Society*, vol. 215, pp. 241–251, 1976.

[15] O. Kada, T. Suzuki, and W. Takahashi, "Nonconvex Minimization Theorems and Fixed Point Theorems in Complete Metric Spaces," *Mathematica Japonica*, vol. 44, no. 2, pp. 381–391, 1996.