

## KONTROL OPTIMAL UNTUK MODEL *COFFEE BERRY DISEASE* DENGAN VEKTOR PEMBAWA *COLLETOTRICHUM KAHAWAE*

Sailah Ar Rizka<sup>1\*</sup>, Nadia Kholifia<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Program Studi Sarjana Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Jember  
Jalan Kalimantan No. 37, Jember, 68121, Indonesia

Email Penulis Korespondensi: \* [sailah.fmipa@unej.ac.id](mailto:sailah.fmipa@unej.ac.id)

### ABSTRAK

**Riwayat Artikel:**

Tanggal Masuk 22-08-2024

Revisi 11-09-2024

Diterima 27-09-2024

**Kata Kunci:**

*Coffee Berry Disease*;  
Model Epidemik;  
Kontrol Optimal;  
Prinsip Minimal Pontryagin

*Coffee Berry Disease (CBD)* adalah penyakit jamur pada kopi yang disebabkan oleh *Colletotrichum kahawae* dan menyebabkan kerugian yang besar dalam segi kualitas dan kuantitas kopi yang dihasilkan. Kontrol optimal diterapkan pada model CBD yang melibatkan interaksi antara vektor pembawa dengan jamur patogen. Strategi kontrol meliputi penggunaan fungisida dan agen biokontrol. Tujuan penerapan kontrol optimal ini adalah untuk meminimalkan banyaknya kopi yang terinfeksi, jamur patogen beserta vektor pembawanya, dan biaya implementasi intervensi penerapan kontrol yang diperlukan. Eksistensi kontrol optimal dan syarat perlu optimalitas diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Minimal Pontryagin. Keefektifan biaya implementasi dari beberapa strategi kontrol yang mungkin diperiksa dengan menggunakan Incremental Cost-Effectiveness Ratio (ICER). Simulasi numerik menunjukkan keefektifan kontrol optimal dalam mengendalikan CBD.




Artikel ini adalah artikel akses terbuka yang didistribusikan berdasarkan syarat dan ketentuan [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/).

**Cara mengutip artikel ini:**

S. A. Rizka, N. Kholifia, "Kontrol Optimal untuk Model *Coffee Berry Disease* dengan Vektor Pembawa *Colletotrichum kahawae*," *MathVision: Jurnal Matematika*, vol. 06, iss. 02, pp. 77-87, 2024.

**KONTAK:**

Penulis Korespondensi (Primary Contact),  [sailah.fmipa@unej.ac.id](mailto:sailah.fmipa@unej.ac.id)  Universitas Jember

 Artikelnya dapat diakses di sini. <https://doi.org/10.55719/mv.v6i2>

## 1. PENDAHULUAN

*Coffee Berry Disease* (CBD) merupakan penyakit yang menyerang buah kopi dan disebabkan oleh jamur patogen *Colletotrichum kahawae*. CBD ditandai dengan menggelapnya buah kopi muda serta dengan cepat menjadi hitam dan menyusut. CBD menjadi salah satu tantangan terbesar dalam pertanian kopi global karena menyebabkan kerusakan pada buah kopi dan menurunkan kualitas serta hasil panen secara signifikan [1]. CBD ini dapat mengakibatkan kerugian ekonomi yang substansial bagi petani dan industri kopi secara keseluruhan [2].

CBD tersebar oleh angin dan hujan secara lokal di antara pohon dan ranting kopi [3]. Namun, vektor, seperti serangga dan burung, juga berperan pada penyebaran CBD dalam jarak jauh dan menengah dengan membawa konidia dari buah kopi yang terinfeksi ke kopi yang sehat [4]. Untuk mengendalikan penyebaran CBD ini, berbagai strategi pengendalian telah diterapkan, termasuk penggunaan fungisida, metode kultur tanaman, dan teknik biologis. Metode kultur tanaman tidak 100% dapat diandalkan untuk mengendalikan CBD [5]. Penggunaan fungisida dapat membasmi jamur patogen dengan cepat namun menyebabkan kerugian lingkungan yang tinggi dengan biaya yang tidak murah [6]. Pada [7], diperoleh hasil bahwa jamur *Fusarium proliferatum*, *Penicillium* and *Fusarium ceraneasum* berpotensi untuk digunakan sebagai agen biokontrol dalam melawan *Colletotrichum kahawae*. Penggunaan agen biokontrol ini membutuhkan proses yang tidak sebentar namun kerugian lingkungan yang ditimbulkan sangat kecil [6]. Di sisi lain, penyebaran CBD dapat menyebabkan kerugian hingga 100% jika opsi pengendalian yang efektif tidak diterapkan [4]. Dengan demikian, pengendalian CBD merupakan tantangan yang kompleks karena melibatkan banyak variabel yang harus dipertimbangkan, seperti biaya, dampak lingkungan, dan efisiensi kontrol [8].

Model matematika memberikan gambaran terkait dinamika penyakit dan serangan hama di bidang pertanian, serta memungkinkan untuk melakukan analisis efek dari berbagai intervensi yang dilakukan untuk selanjutnya diperoleh strategi pengendalian yang optimal. Kontrol optimal adalah pendekatan yang memanfaatkan teori kontrol untuk menentukan strategi yang memaksimalkan atau meminimalkan suatu fungsi objektif, seperti pengendalian penyakit dengan biaya implementasi intervensi minimal atau dampak lingkungan yang rendah [9]. Beberapa model matematika terkait dinamika penyakit dan serangan hama pada tanaman kopi beserta implementasi kontrolnya telah dikembangkan. Dinamika serangan hama *Coffee Berry Borer* (CBB) pada tanaman kopi bersama dengan strategi kontrol optimal yang menggunakan jamur parasit diberikan pada [10]. Model matematika untuk pengendalian CBB dengan menggunakan musuh alami seperti semut diberikan pada [11] dan [12]. Penyebaran penyakit *Coffee Leaf Rust* (CLF) beserta pengendaliannya dengan menggunakan jamur *Hemileia vastatrix* diberikan pada [13] and [14]. Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan kontrol optimal dalam rangka meminimalkan dampak penyebaran CBD pada tanaman kopi dengan memperhatikan interaksi antara vektor pembawa (serangga dan burung) dengan jamur patogen *Colletotrichum kahawae*. Untuk itu, penelitian ini mengkaji model matematika yang merepresentasikan penyebaran CBD [15] dimana dinamika vektor pembawa jamur patogen *Colletotrichum kahawae* ditinjau. Pada bagian Metode, disajikan formulasi model CBD dengan kontrol dan penggunaan Prinsip Minimal Pontryagin untuk menyelesaikan masalah kontrol optimal yang diajukan. Pada bagian Hasil dan Pembahasan, dibahas hasil simulasi numerik implementasi beberapa strategi pengendalian CBD dan diakhiri dengan bagian Kesimpulan.

## 2. METODE

Pada bagian ini, diformulasikan model CBD dengan kontrol. Selanjutnya, masalah kontrol optimal diajukan dan diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Minimal Pontryagin.

### 2.1 Model CBD dengan Kontrol

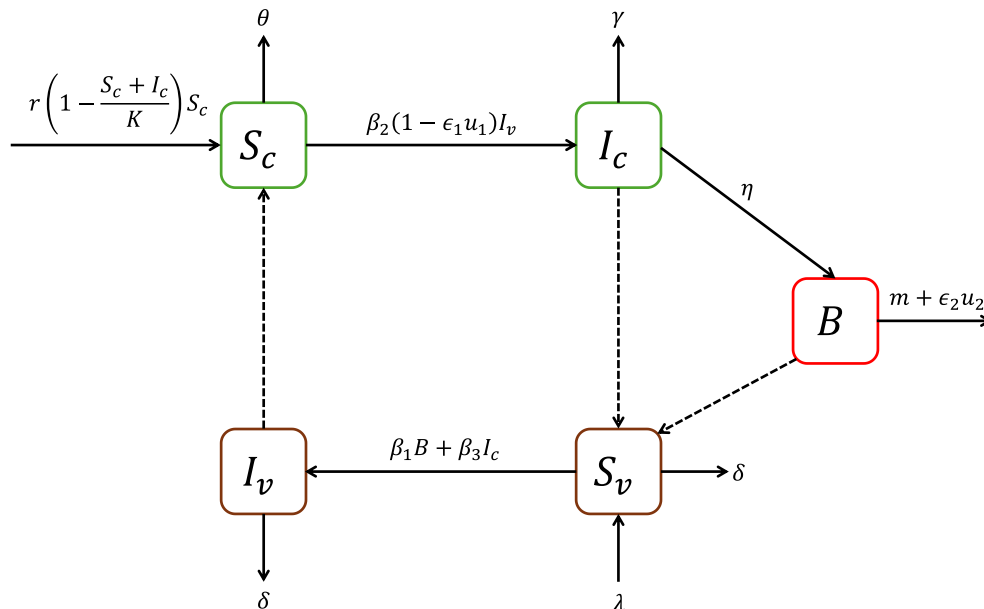
Pada bagian ini, model CBD dari [15] yang memperhatikan kopi dan populasi vektor beserta interaksinya dengan jamur patogen dikaji. Model CBD terdiri atas lima kompartemen, yakni populasi kopi rentan ( $S_c$ ); populasi kopi yang terinfeksi jamur patogen ( $I_c$ ); populasi vektor rentan, tidak membawa jamur patogen ( $S_v$ ); populasi vektor terinfeksi, membawa jamur patogen ( $I_v$ ); dan populasi jamur patogen ( $B$ ). Dua kontrol yang merupakan fungsi dari waktu  $t$  ditambahkan pada model CBD, yakni

1. Penggunaan kontrol fungisida ( $u_1(t)$ ) dengan efektivitas  $\epsilon_1$ , untuk melindungi populasi kopi rentan  $S_c$  dari infeksi jamur patogen yang dibawa oleh vektor terinfeksi.

2. Pemberantasan jamur patogen ( $\mathbf{u}_2(t)$ ) melalui penggunaan agen biokontrol dengan efektivitas  $\epsilon_2$ . Kontrol ini meningkatkan tingkat kematian jamur patogen  $B$  sebesar  $\epsilon_2 \mathbf{u}_2$ . Model CBD dengan kontrol diberikan oleh sistem persamaan differensial tak linear berikut.

$$\begin{aligned} \dot{S}_c &= rS_c \left(1 - \frac{S_c + I_c}{K}\right) - \beta_2(1 - \epsilon_1 u_1)I_v S_c - \theta S_c, \\ \dot{I}_c &= \beta_2(1 - \epsilon_1 u_1)I_v S_c - (\gamma + \eta)I_c, \\ \dot{S}_v &= \lambda - (\beta_1 B + \beta_3 I_c)S_v - \delta S_v, \\ \dot{I}_v &= (\beta_1 B + \beta_3 I_c)S_v - \delta I_v, \\ \dot{B} &= \eta I_c - (m + \epsilon_2 u_2)B. \end{aligned} \quad (1)$$

Merujuk pada [15], populasi kopi rentan  $S_c$  berkembang mengikuti fungsi pertumbuhan logistik dengan laju  $r$  dan kapasitas dukung lingkungan  $K$  akibat ketersediaan lahan pertanian yang terbatas. Populasi kopi rentan  $S_c$  menjadi terinfeksi  $I_c$  setelah ada kontak dengan vektor pembawa jamur patogen  $I_v$  dengan laju  $\beta_2$ . Kopi yang terinfeksi jamur patogen  $I_c$  tidak akan sehat kembali dan mengakibatkan pengurangan hasil panen. Selain itu, populasi vektor rentan direkrut dengan laju  $\lambda$ . Populasi vektor rentan  $S_v$  menjadi terinfeksi  $I_v$  dari jamur patogen  $B$  dengan laju  $\beta_1$  atau dari kopi terinfeksi  $I_c$  dengan laju  $\beta_3$ . Buah kopi yang terinfeksi  $I_c$  merupakan kontributor jamur patogen  $B$  ke lingkungan dengan laju  $\eta$ . Parameter model yang lain beserta nilai dan deskripsinya diberikan pada Tabel 1. Diagram alur dari transmisi CBD diberikan oleh Gambar 1.



**Gambar 1.** Diagram alur transmisi CBD. Garis solid dan putus-putus, masing-masing menunjukkan laju perpindahan dan kontak antar kompartemen.

Pada sistem (1) diasumsikan bahwa laju infeksi dari kopi rentan  $S_c$  sebanding dengan banyaknya vektor terinfeksi  $I_v$  dan konstanta proporsi  $\beta_2$ . Bilangan reproduksi dasar merepresentasikan banyaknya kasus infeksi kedua yang disebabkan oleh satu kasus infeksi pada suatu populasi rentan. Bilangan reproduksi dasar  $R_0$  dari sistem (1) saat  $u_1 = u_2 = 0$  sebanding dengan akar dari koefisien infeksi  $\beta_2$  [15] dan diberikan oleh

$$R_0 = \sqrt{\frac{K\lambda\beta_2(\beta_3 m + \beta_1 \eta)(r - \theta)}{rm(\gamma + \eta)\delta^2}}. \quad (2)$$

Selanjutnya untuk mengetahui bahwa strategi kontrol dapat memperkecil  $R_0$ , digunakan prosedur yang sama pada [15] untuk memperoleh bilangan reproduksi dasar saat kontrol  $\mathbf{u}_1$  dan  $\mathbf{u}_2$  ada. Bilangan reproduksi dasar tersebut diberikan pada Proposisi 1 berikut.

**Tabel 1.** Nilai Parameter Model CBD dan Deskripsinya

Parameter	Deskripsi	Satuan	Nilai	Sumber
$\beta_1$	Laju kontak antara vektor rentan $S_v$ dengan jamur patogen $B$	hari <sup>-1</sup>	0,000209818	[15]
$\beta_2$	Laju kontak antara kopi rentan $S_c$ dengan vektor terinfeksi $I_v$	hari <sup>-1</sup>	0,000795455	[15]
$\beta_3$	Laju kontak antara vektor rentan $S_v$ dengan kopi terinfeksi $I_c$	hari <sup>-1</sup>	0,000149091	[15]
$\theta$	Laju kematian dari kopi rentan $S_c$	hari <sup>-1</sup>	0,01	[15], [16]
$\gamma$	Laju kematian dari kopi terinfeksi $I_c$	hari <sup>-1</sup>	0,005	[15]
$r$	Laju pertumbuhan kopi rentan $S_c$ baru	hari <sup>-1</sup>	0,12	[15], [17]
$K$	Kapasitas dukung lingkungan	m <sup>-2</sup>	150	[15]
$\eta$	Laju perkembangan jamur patogen oleh kopi terinfeksi $I_c$	sel.ml <sup>-1</sup> individu <sup>-1</sup> . hari <sup>-1</sup>	0,009	[15]
$\lambda$	Laju rekrutmen vektor rentan $S_v$	hari <sup>-1</sup>	0,488364	[15]
$m$	Laju kematian dari jamur patogen $B$	hari <sup>-1</sup>	0,0900982	[15]
$\delta$	Laju kematian dari vektor	hari <sup>-1</sup>	0,009	[15]
$\epsilon_1$	Efektivitas penggunaan fungisida	ml <sup>-1</sup>	0,5	Asumsi
$\epsilon_2$	Efektivitas penggunaan agen biokontrol	ml <sup>-1</sup>	0,5	Asumsi
$S_c(0)$	Banyak awal kopi rentan $S_c$	kopi	100	Asumsi
$I_c(0)$	Banyak awal kopi terinfeksi $I_c$	kopi	50	Asumsi
$S_v(0)$	Banyak awal vektor rentan $S_v$	individu	50	Asumsi
$I_v(0)$	Banyak awal vektor terinfeksi $I_v$	individu	10	Asumsi
$B(0)$	Banyak awal jamur patogen	organisme	2	Asumsi
$W_1$	Bobot ongkos untuk kontrol $u_1$	Rp. ml <sup>-1</sup>	1,2	Asumsi
$W_2$	Bobot ongkos untuk kontrol $u_2$	Rp. ml <sup>-1</sup>	0,5	Asumsi

**Proposisi 1.** Bilangan reproduksi dasar  $R_0(u_1, u_2)$  untuk sistem (1) diberikan oleh

$$R_0 = \sqrt{\frac{K\lambda\beta_2(1 - \epsilon_1u_1)(\beta_3(m + \epsilon_2u_2) + \beta_1\eta)(r - \theta)}{r(m + \epsilon_2u_2)(\gamma + \eta)\delta^2}}. \quad (3)$$

**Bukti.** Sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit:

$$E_0 = \left( K \left( 1 - \frac{\theta}{r} \right), 0, \frac{\lambda}{\delta}, 0, 0 \right). \quad (4)$$

Bilangan reproduksi dasar dihitung dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* sebagaimana dijelaskan di [18]. Untuk itu, hanya kompartemen terinfeksi yang akan ditinjau, yakni:

$$\begin{aligned} \dot{I}_c &= \beta_2(1 - \epsilon_1u_1)I_vS_c - (\gamma + \eta)I_c, \\ \dot{I}_v &= (\beta_1B + \beta_3I_c)S_v - \delta I_v, \\ \dot{B} &= \eta I_c - (m + \epsilon_2u_2)B. \end{aligned} \quad (5)$$

Selanjutnya, sisi kanan dari sistem (5) ditulis dalam bentuk  $\mathcal{F} - \mathcal{V}$ , dimana

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta_2(1 - \epsilon_1 u_1) I_v S_c \\ (\beta_1 B + \beta_3 I_c) S_v \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (\gamma + \eta) I_c \\ \delta I_v \\ -\eta I_c + (m + \epsilon_2 u_2) B \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobian dari  $\mathcal{F}$  dan  $\mathcal{V}$  diberikan oleh

$$J_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_2(1 - \epsilon_1 u_1) S_c & 0 \\ \beta_3 S_v & 0 & \beta_1 S_v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} \gamma + \eta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ -\eta & 0 & m + \epsilon_2 u_2 \end{bmatrix}.$$

Bilangan reproduksi dasar (3) diperoleh sebagai radius spektral dari *Next Generation Matrix*  $J_{\mathcal{F}} \times J_{\mathcal{V}}^{-1}$  pada titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  (4).

□

Ambang batas endemik pada  $R_0 = 1$  mengindikasikan potensi penularan minimal yang dapat membuat suatu penyakit endemik, yakni saat  $R_0 < 1$  maka penyakit tersebut akan menghilang dan saat  $R_0 > 1$  maka penyakit tersebut dapat menjadi endemik. Dari (3), jelas bahwa kontrol  $u_1$  memiliki peran penting dalam mengendalikan endemik. Khususnya, eksistensi kontrol  $u_1$  pada sistem (1) dapat memperkecil bilangan reproduksi dasar  $R_0$ , yakni  $R_0(u_1, 0) \leq R_0(0, 0)$ , sebagaimana ditunjukkan oleh Proposisi 2 berikut.

**Proposisi 2. Pertidaksamaan**

$$R_0(u_1, u_2) \leq R_0(0, u_2)$$

berlaku untuk sebarang nilai parameter sistem (1).

**Bukti.** Perhatikan bahwa

$$\frac{\partial R_0(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \frac{-\epsilon_1 \lambda \beta_2 K (\beta_3 (m + \epsilon_2 u_2) + \beta_1 \eta) (r - \theta)}{2R_0} \leq 0,$$

untuk sebarang nilai parameter. Jadi, bilangan reproduksi dasar menurun dengan meningkatnya kontrol  $u_1$ .

□

## 2.2 Masalah Kontrol Optimal

Pada bagian ini, akan disajikan masalah kontrol optimal yang terdiri atas fungsi objektif dan batasan epidemi yang dikaji. Tujuan dari strategi kontrol adalah untuk menentukan nilai optimal  $u_1^*$  dan  $u_2^*$  dari kontrol  $u_1$  dan  $u_2$ , sedemikian sehingga  $S_c^*, I_c^*, S_v^*, I_v^*, B^*$  adalah solusi yang bersesuaian dari sistem (1) pada interval waktu  $[0, T]$  dengan nilai awal  $S_c(0), I_c(0), S_v(0), I_v(0), B(0)$ , serta meminimalkan fungsi objektif terkait. Di sini, fungsi objektif mempertimbangkan banyaknya kopi terinfeksi  $I_c$ , banyaknya vektor terinfeksi  $I_v$ , banyaknya jamur patogen  $B$ , dan biaya implementasi intervensi yang berkaitan dengan kontrol  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ . Kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  memenuhi  $0 \leq u_i \leq 1$ ,  $i = 1, 2$ . Saat  $u_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ , maka tidak ada intervensi yang dilakukan. Sementara, saat  $u_i = 1$ ,  $i = 1, 2$ , maka besarnya kontrol yang dilakukan bersesuaian dengan efektivitas kontrol  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ . Himpunan fungsi kontrol yang berlaku diberikan oleh

$$\Lambda = \left\{ (u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \in (\mathcal{L}^\infty(0, T))^2 \mid 0 \leq u_1(t), u_2(t) \leq 1, \forall t \in [0, T] \right\}. \quad (6)$$

Fungsi objektif diberikan oleh

$$J(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) = \int_0^T \left[ I_c(t) + I_v(t) + B(t) + \frac{W_1}{2} u_1^2(t) + \frac{W_2}{2} u_2^2(t) \right] dt, \quad (7)$$

dimana konstanta  $W_1$  dan  $W_2$  adalah biaya relatif dari intervensi yang terkait dengan masing-masing kontrol  $u_1$  dan  $u_2$ . Eksistensi kontrol optimal  $(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot))$  yang meminimalkan fungsi objektif (7) diberikan oleh teorema berikut.

**Teorema 1.** Diberikan fungsi objektif (7) yang berkaitan dengan masalah nilai awal (1) pada interval waktu  $[0, T]$ , ada kontrol optimal  $(u_1^*, u_2^*) \in \Lambda$  dan solusi yang berkaitan  $(S_c^*, I_c^*, S_v^*, I_v^*, B)$  sedemikian sehingga

$$J(u_1^*(\cdot), u_2^*(\cdot)) = \min_{\Lambda} J(u_1(\cdot), u_2(\cdot)) \quad (8)$$

**Bukti.** *State* dari sistem (1) dapat diturunkan secara kontinu. Berdasarkan [15], *state* dari sistem (1) kontinu dan terbatas. Hal ini menunjukkan bahwa sistem (1) bersama dengan kontrol yang berlaku (6) memenuhi kondisi Lipschitz dalam kaitannya dengan *state*, yang merupakan akibat dari terbatasnya turunan parsial terhadap *state*-nya. Dengan demikian, berdasarkan teorema Picard-Lindelöf [19], himpunan solusi dari sistem (1) dengan fungsi kontrol yang bersesuaian (6) tidak kosong. Selanjutnya, perhatikan bahwa sistem (1) ditulis dalam bentuk linear terhadap fungsi kontrol dimana koefisiennya bergantung pada waktu dan *state*. Selain itu, integran dari fungsi objektif (7) dalam bentuk kuadrat dari fungsi kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  sehingga konveks dalam  $u_1$  dan  $u_2$ . Dengan demikian, berdasarkan [20], kontrol optimal  $(u_1^*, u_2^*)$  yang meminimalkan fungsi objektif (7) ada. □

Syarat perlu untuk optimalitas diperoleh dengan menggunakan Prinsip Minimal Pontryagin [21], sebagaimana diberikan oleh teorema berikut.

**Teorema 2.** Misal  $(u_1^*, u_2^*)$  merupakan kontrol optimal dari masalah (1), (6), (8), dan  $(S_c^*, I_c^*, S_v^*, I_v^*, B^*)$  merupakan solusi optimal yang bersesuaian pada interval waktu  $[0, T]$ . Maka, ada fungsi adjoin  $\alpha_1^*(\cdot)$ ,  $\alpha_2^*(\cdot)$ ,  $\alpha_3^*(\cdot)$ ,  $\alpha_4^*(\cdot)$ , dan  $\alpha_5^*(\cdot)$  yang memenuhi

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \alpha_1 \left( -r \left( 1 - \frac{S_c + I_c}{K} \right) + \frac{r}{K} S_c + \beta_2 (1 - \epsilon_1 u_1) I_v + \theta \right) - \alpha_2 \beta_2 (1 - \epsilon_1 u_1) I_v, \\ \dot{\alpha}_2 &= -1 + \alpha_1 \frac{r}{K} S_c + \alpha_2 (\gamma + \eta) + (\alpha_3 - \alpha_4) \beta_3 S_v - \alpha_5 \eta, \\ \dot{\alpha}_3 &= \alpha_3 (\beta_1 B + \beta_3 I_c + \delta) - \alpha_4 (\beta_1 B + \beta_3 I_c), \\ \dot{\alpha}_4 &= -1 + (\alpha_1 - \alpha_2) \beta_2 (1 - \epsilon_1 u_1) S_c + \alpha_4 \delta, \\ \dot{\alpha}_5 &= -1 + (\alpha_3 - \alpha_4) \beta_1 S_v + \alpha_5 (m + \epsilon_2 u_2), \end{aligned} \quad (9)$$

dengan kondisi transversalitas:

$$\alpha_i(T) = 0, i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (10)$$

Lebih lanjut,

$$\begin{aligned} u_1^* &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\beta_2 \epsilon_1 I_v^* S_c^* (\alpha_2 - \alpha_1)}{W_1} \right\}, 1 \right\}, \\ u_2^* &= \min \left\{ \max \left\{ 0, \frac{\alpha_5 \epsilon_2 B^*}{W_2} \right\}, 1 \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

**Bukti.** Dari sistem (1) dan fungsi objektif (7), tulis fungsi Hamiltonian  $\mathcal{H}$  sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= I_c + I_v + B + \frac{W_1}{2} u_1^2 + \frac{W_2}{2} u_2^2 + \alpha_1 \left( r S_c \left( 1 - \frac{S_c + I_c}{K} \right) - \beta_2 (1 - \epsilon_1 u_1) I_v S_c - \theta S_c \right) \\ &\quad + \alpha_2 (\beta_2 (1 - \epsilon_1 u_1) I_v S_c - (\gamma + \eta) I_c) + \alpha_3 (\lambda - (\beta_1 B + \beta_3 I_c) S_v - \delta S_v) \\ &\quad + \alpha_4 ((\beta_1 B + \beta_3 I_c) S_v - \delta I_v) + \alpha_5 (\eta I_c - (m + \epsilon_2 u_2) B), \end{aligned} \quad (12)$$

dimana  $\alpha$  adalah fungsi kontinu  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}^5$  dan  $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t), \alpha_5(t))$  selanjutnya disebut *vektor adjoin*. Hasil pada teorema ini berasal dari Prinsip Minimal Pontryagin [21] yang menyatakan bahwa solusi optimal diperoleh dengan memenuhi sistem persamaan adjoin:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_c}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_c}, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S_v}, \quad \frac{d\alpha_4}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_v}, \quad \frac{d\alpha_5}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial B},$$

yang memberikan (9) dan memenuhi kondisi transversalitas (10). Selain itu, kontrol optimal  $(u_1^*, u_2^*)$  diperoleh dengan meminimalkan Hamiltonian  $\mathcal{H}$  terhadap  $(u_1, u_2)$ . Hal ini bisa diperoleh dari syarat perlu optimalitas berikut.

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_2} = 0.$$

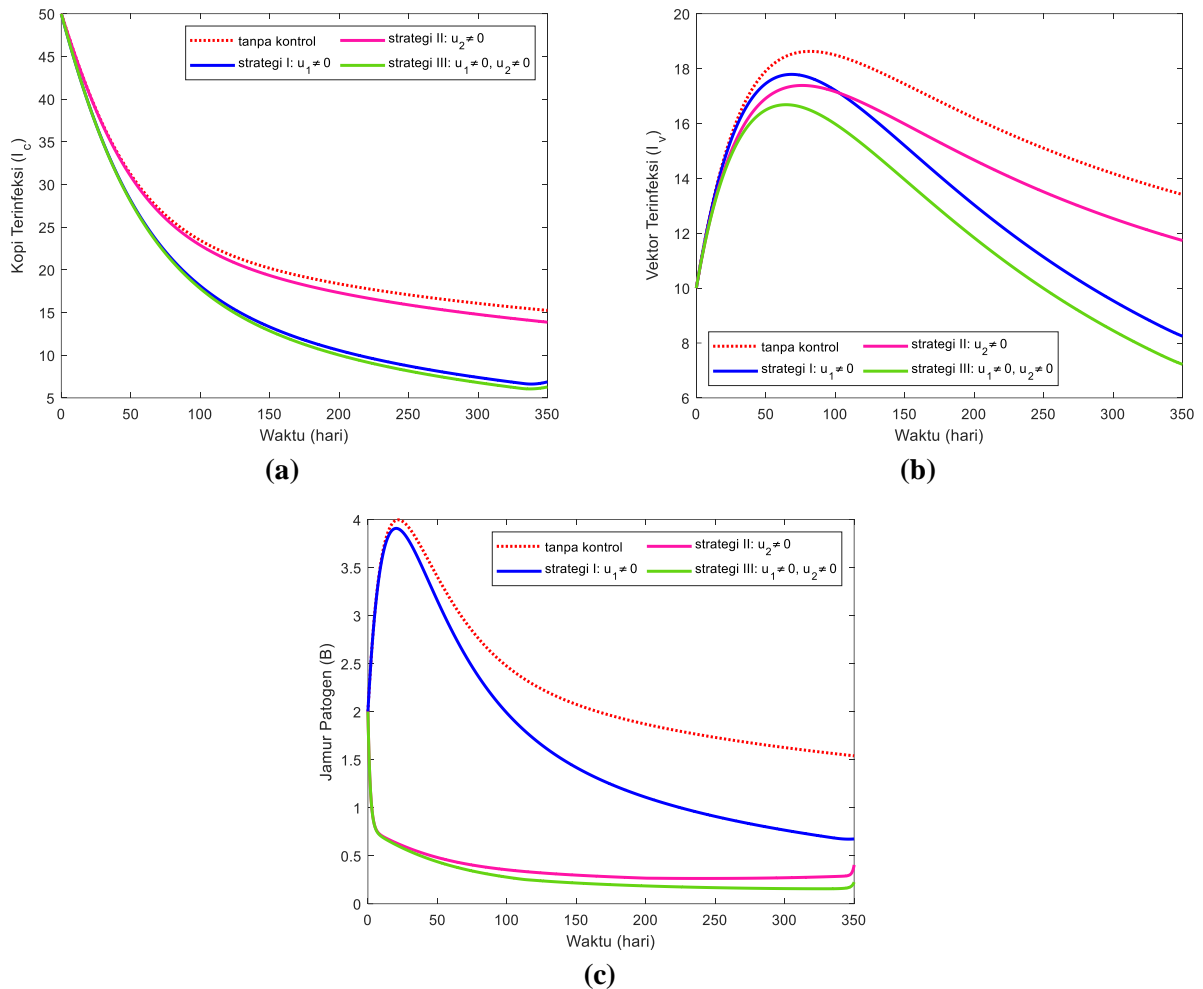
Dengan mempertimbangkan kendala untuk kontrol  $(u_1, u_2)$  di (6), diperoleh optimal kontrol  $(u_1^*, u_2^*)$  sebagaimana di (11). □

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

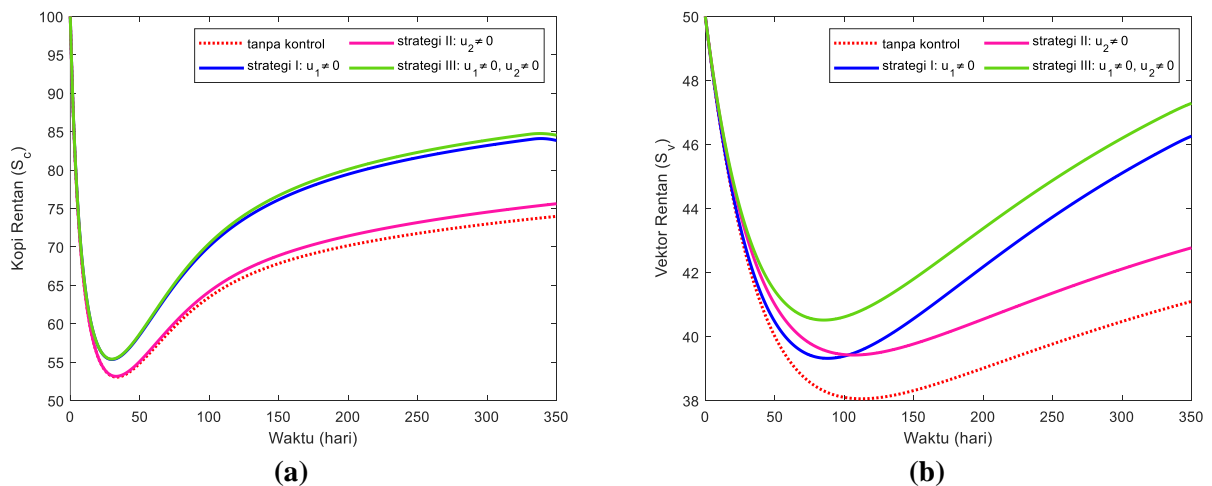
Pada bagian ini diberikan hasil numerik dari implementasi kontrol optimal untuk model CBD (1) dengan fungsi objektif (7). Sistem *state* (1), sistem adjoin (9) bersama dengan kondisi transversalitas (10), dan formulasi kontrol optimal (11) diselesaikan secara numerik dengan menggunakan *Forward-Backward Sweep Method* [22]. Nilai awal  $S_c(0), I_c(0), S_v(0), I_v(0), B(0)$  dan bobot ongkos pada fungsi objektif (7) diberikan di Tabel 1. Simulasi numerik dari penyelesaian masalah kontrol optimal dengan strategi I: kontrol  $u_1$  saja, strategi II: kontrol  $u_2$  saja, serta strategi III: kedua kontrol  $u_1$  dan  $u_2$ , disajikan untuk mengetahui efektivitas dari masing-masing strategi dalam mengendalikan CBD.

#### 3.1 Strategi I: penggunaan optimal dari fungsida saja ( $u_1 \neq 0$ )

Pada strategi I, fungsi objektif diminimalkan dengan menggunakan kontrol fungsida ( $u_1$ ) dan tidak menggunakan agen biokontrol ( $u_2 = 0$ ). Sebagaimana ditunjukkan Gambar 2 (a) dan (b), pengimplementasian strategi I menurunkan banyak kopi terinfeksi  $I_c$  dan vektor terinfeksi  $I_v$  secara signifikan dibandingkan dengan tanpa kontrol. Sementara, banyak jamur patogen  $B$  menurun dibandingkan dengan tanpa kontrol tapi tidak signifikan seperti pada dua strategi yang lain. Penurunan signifikan yang terjadi pada kompartemen infeksi,  $I_c$  dan  $I_v$ , berakibat pada kenaikan secara signifikan banyak kopi rentan  $S_c$  dan vektor rentan  $S_v$ , seperti pada Gambar 3. Profil kontrol  $u_1$  yang diimplementasikan pada strategi I ditunjukkan oleh Gambar 4 (a). Bisa dilihat bahwa kontrol  $u_1$  mencapai nilai maksimum 1 paling lama dibandingkan dengan dua strategi yang lain, yakni selama kurang lebih 333 hari.

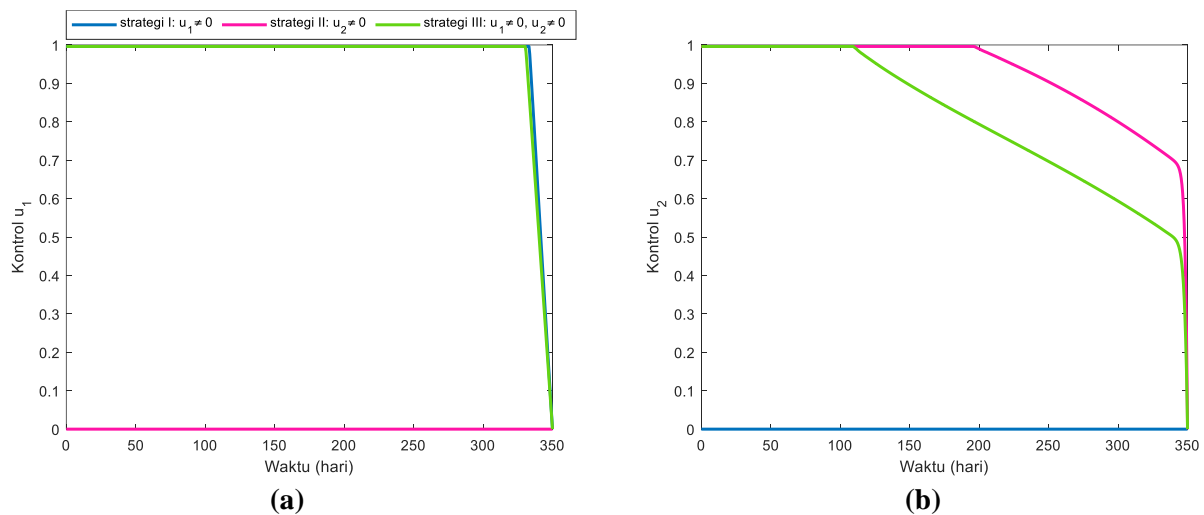


**Gambar 2.** Solusi numerik dari (a) kopi terinfeksi  $I_c$ , (b) vektor terinfeksi  $I_v$ , dan (c) jamur patogen  $B$  pada saat implementasi kontrol optimal dengan strategi I ( $u_1 \neq 0$ ), strategi II ( $u_2 \neq 0$ ), strategi III ( $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ ), dan tanpa kontrol



**Gambar 3.** Solusi numerik dari (a) kopi rentan  $S_c$ , (b) vektor rentan  $S_v$ , dan (c) jamur patogen  $B$  pada saat implementasi kontrol optimal dengan strategi I ( $u_1 \neq 0$ ), strategi II ( $u_2 \neq 0$ ), strategi III ( $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ ), dan tanpa kontrol





**Gambar 4.** Profil kontrol optimal (a)  $u_1$  dan (b)  $u_2$  pada strategi I ( $u_1 \neq 0$ ), strategi II ( $u_2 \neq 0$ ), dan strategi III ( $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ )

### 3.2 Strategi II: penggunaan optimal dari agen biokontrol saja ( $u_2 \neq 0$ )

Pada strategi II, fungsi objektif diminimalkan dengan menggunakan agen biokontrol ( $u_2$ ) dan tidak menggunakan kontrol fungsida ( $u_1 = 0$ ). Penggunaan agen biokontrol ( $u_2$ ) menurunkan banyak jamur patogen  $B$  secara signifikan dibandingkan dengan tanpa kontrol, seperti pada Gambar 2 (c). Banyak kopi terinfeksi  $I_c$  dan vektor terinfeksi  $I_v$  juga menurun tapi tidak signifikan jika dibandingkan dengan strategi I dan III, sebagaimana ditunjukkan Gambar 2 (a) dan (b). Sementara, pengimplementasian strategi II mengakibatkan peningkatan banyak kopi rentan  $S_c$  dan vektor rentan  $S_v$  walaupun tidak signifikan. Dapat dilihat pada Gambar 4 (b) bahwa kontrol  $u_2$  pada strategi II berada pada nilai maksimum 1 selama kurang lebih 196 hari, paling lama dibandingkan dengan strategi III.

### 3.3 Strategi III: penggunaan optimal dari fungsida dan agen biokontrol saja ( $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$ )

Kontrol fungsida ( $u_1$ ) dan agen biokontrol ( $u_2$ ) diimplementasikan pada strategi III untuk meminimalkan fungsi objektif (7). Gambar 2 menunjukkan penurunan yang paling signifikan pada kompartemen infeksi,  $I_c, I_v, B$ , dibandingkan dengan dua strategi yang lain. Hal ini kemudian berdampak pada peningkatan yang juga paling signifikan pada kompartemen rentan,  $S_c$  dan  $S_v$ . Profil kontrol  $u_1$  dan  $u_2$  pada strategi III yang memberikan biaya intervensi minimum diberikan oleh Gambar 4, dimana  $u_1$  mencapai nilai maksimum 1 selama kurang lebih 330 hari dan  $u_2$  bernilai 1 selama kurang lebih 109 hari.

Untuk membandingkan keberhasilan implementasi kontrol dari ketiga strategi yang diajukan, digunakan *Incremental Cost-Effectiveness Ratio* (ICER). ICER [23] bisa digunakan untuk membandingkan efektivitas biaya inkremental dari satu strategi dengan strategi alternatif lainnya yang kurang efektif. Berikut adalah rumus ICER (9) yang digunakan.

$$\text{ICER} = \frac{\text{selisih biaya intervensi}}{\text{selisih banyak infeksi yang berhasil ditangani}} \quad (13)$$

Total banyaknya infeksi yang berhasil ditangani dihitung dengan menghitung selisih antara banyaknya infeksi baru tanpa kontrol dan banyaknya infeksi baru pada skema dengan kontrol. Peringkat ICER ditunjukkan pada Tabel 2. Dapat dilihat bahwa strategi II (penggunaan agen biokontrol) berada di peringkat ICER paling rendah. Sementara, strategi III (kombinasi penggunaan fungsida dan agen biokontrol) memiliki biaya intervensi yang paling efektif sebagaimana ditunjukkan oleh peringkat ICER-nya.

Tabel 2. Efektivitas Biaya dari Beberapa Strategi

Strategi	Banyaknya populasi di akhir simulasi ( $T$ )			Banyaknya yang ditangani	Biaya	No. ICER
	$I_c$	$I_v$	$B$			
Tanpa kontrol	16	14	2			
I	7	9	1	15	11.080	2
II	14	12	1	5	12.896	3
III	7	8	1	16	10.142	1

#### 4. KESIMPULAN

Kontrol optimal pada model *Coffee Berry Disease* (CBD) yang meliputi penggunaan fungisida dan agen biokontrol berhasil dalam mengurangi banyaknya kopi terinfeksi, vektor pembawa *Colletotrichum kahawae*, dan jamur patogen *Colletotrichum kahawae*, sekaligus meminimalkan biaya implementasi kontrol yang ditimbulkan. Analisis terhadap bilangan reproduksi dasar pada saat kontrol diterapkan menunjukkan bahwa penerapan kontrol dapat memperkecil besarnya bilangan reproduksi dasar. Hal ini berarti penerapan kontrol dapat mengurangi potensi suatu endemik. Perhitungan ICER menunjukkan bahwa penggunaan kedua fungisida dan agen biokontrol dinilai sebagai strategi kontrol optimal paling efektif dibandingkan hanya menggunakan fungisida saja atau agen biokontrol saja.

#### REFERENSI

- [1] A. Calle, J. Santos, and R. Rivas, "Coffee berry disease: A review," *Plant Pathology*, vol. 62(3), pp. 568-576, 2013.
- [2] P. Fichet, B. Bertrand, and E. De Langre, "Economic impacts of coffee berry disease in major coffee-producing regions," *Agricultural Economics*, vol. 47(2), pp. 223-235, 2016.
- [3] E. Griffiths, J. N. Gibbs, and J. M. Waller, "Control of coffee berry disease," *Annals of Applied Biology*, vol. 67, pp. 45-74, 1991.
- [4] Z. Wubshet and D. Merga, "Biology, Dispersal and Management of Coffee Berry Disease: A Review," *Journal of Biology, Agriculture and Healthcare*, vol. 10(20), pp. 14-25, 2020.
- [5] S. M. Malaka, G. O. Alwora, and S. N. Bonuke, "Efficacy of Two New Fungicides Against *Colletotrichum kahawae* Infecting Coffee in Kenya," *Current Agriculture Research Journal*, vol. 9(2), pp. 83-90, 2021.
- [6] J. Chowdhury, F. A. Basir, Y. Takeuchi, M. Ghosh, and P. K. Roy, "A mathematical model for pest management in *Jatropha curcas* with integrated pesticides - An optimal control approach," *Ecological Complexity*, vol. 37, pp. 24-31, 2019.
- [7] H. N. Msanya, S. Runo, D. W. Miano, M. W. Gikungu, E. K. Gichuru, C. Wagikondi, K. Kathurima, and G. O. Alwora, "The Potential of Fungi as Bio-Control Agents in Managing *Colletotrichum Kahawae* in Kenya," *Current Agriculture Research Journal*, vol. 9(3), pp. 171-178, 2021.
- [8] J. Simmonds and R. Nunez, "Integrated pest management for coffee berry disease," *Journal of Pest Science*, vol. 93(1), pp. 45-60, 2020.
- [9] K. Kirk and A. Peters, "Optimal control theory and applications in agriculture," *Journal of Agricultural Systems*, vol. 172, pp. 1-15, 2019.
- [10] Y. F. Fotso, S. Touzeau, B. Tsanou, S. Bowong, and F. Grogard, "Modelling and optimal strategy to control coffee berry borer," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 44(18), pp. 14569-14592, 2021.
- [11] D. S. Mandal, A. Chekroun, S. Samanta, and J. Chattopadhyay, "A mathematical study of a crop-pest-natural enemy model with Z-type control," *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 187, pp. 468-488, 2021.
- [12] C. A. Trujillo-Salazar, G. Olivar-Tost, and D. M. Sotelo-Castelblanco, "Mathematical Model for the Biological Control of the Coffee Berry Borer *Hypothenemus hampei* through Ant Predation," *Insects*, vol. 14(8), 2023.
- [13] C. Djuikem, F. Grogard, R. T. Wafo, S. Touzeau, and S. Bowong, "Modelling coffee leaf rust dynamics to control its spread," *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 16, 2021.

- [14] C. Djuikem, A. G. Yabo, F. Grogard, and S. Touzeau, "Mathematical modelling and optimal control of the seasonal coffee leaf rust propagation," *IFAC PapersOnline*, vol. 54(5), pp. 193-198, 2021.
- [15] A. S. Melese, O. D. Makinde, and L. L. Obsu, "Mathematical modelling and analysis of coffee berry disease dynamics on a coffee farm," *Mathematical Biosciences and Engineering*, vol. 19(7), pp. 7349–7373, 2022.
- [16] Y. F. Fotso, S. Touzeau, B. Tsanou, F. Grogard, and S. Bowong, "Mathematical modelling of a pest in an age-structured crop model: The coffee berry borer case," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 110, pp. 193-206, 2022.
- [17] M. M. Campanha, R. H. S. Santos, G. B. D. Freitas, H. E. P. Martinez, C. Jaramillo-Botero, and S. L. Garcia, "Comparative analysis of litter and soil characteristics under coffee (*Coffea arabica* L.) crop in agroforestry and monoculture systems," *Revista A ´rvore*, vol. 31, pp. 805–812, 2007.
- [18] H. S. Rodrigues, M. T. T. Monteiro, D. F. M. Torres, and A. Zinober, "Dengue disease, basic reproduction number and control," *International Journal Computer Mathematics*. vol. 89 (3), pp. 334–346, 2012.
- [19] B. J. Schroers, "Ordinary differential equations: a practical guide," Cambridge University Press, New York, 2011.
- [20] W. H. Fleming and R. W. Rishel, "Deterministic and stochastic optimal control," Springer, New York, 2012.
- [21] L. Pontryagin, V. Boltyanskii, R. Gramkrelidze, and E. Mischenko, "The Mathematical Theory of Optimal Processes," John Wiley & Sons, New York-London, 1962.
- [22] S. Lenhart, and J. T. Workman, "Optimal control applied to biological models," Chapman and Hall/CRC, New York, 2007.
- [23] G. G. Mwanga, H. Haario, and V. Capasso, "Optimal control problems of epidemic systems with parameter uncertainties: Application to a malaria two-age classes transmission model with asymptomatic carriers," *Mathematical Biosciences*, vol. 261, pp. 1-12, 2015.