MathVision : Jurnal Matematika
Maret 2025 Volume 07 Issue 01 Page 22–28
P-ISSN: 2656-6303 E-ISSN: 2656-9876
https://doi.org/10.55719/mv.v7i1.1496

EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP HARDY DI RUANG *B*-METRIK LENGKAP

Ahmad Khairul Umam [1*], Krisna Adilia Daniswara [2], Pukky Tetralian Bantining Ngastiti [3], Zaqiyatus Shahadah [4], Amanda Fatma Muamalah [5]

[1,2,3,4,5]*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Billfath*
Komplek PP. Al Fattah Siman Sekaran, Lamongan, 62261, Indonesia

*Email: * **ahmad.khairul.umam@gmail.com***

ABSTRAK

Riwayat Artikel:

Tanggal Masuk ***13-11-2024***
Revisi ***18-02-2025***
Diterima ***03-03-2025***

Kata Kunci:

Titik Tetap Hardy;
Ruang Metrik;
Ruang b-Metrik Lengkap

Titik tetap berguna tidak hanya untuk menyelesaikan permasalahan pada persamaan linear dan persamaan differensial, tetapi juga persamaan integral. Teorema titik tetap Hardy merupakan perluasan dari teorema titik tetap Reich. Ruang metrik dapat digeneralisasi menjadi ruang-ruang yang lain. Ruang b-metrik merupakan salah satu perluasan dari ruang metrik. Aksioma ketaksamaan segitiga ruang metrik tidak sama dengan aksioma ketaksamaan segitiga di ruang b-metrik. Pada penelitian ini dibahas teorema titik tetap Hardy di ruang metrik. Selain itu, juga dibahas teorema titik tetap Hardy di dalam ruang b-metrik yang lengkap. Sebelum membuktikan teorema tersebut, terlebih dahulu dibuktikan lemma yang mendukung pembuktian teorema. Dibuktikan tidak hanya eksistensi tetapi juga ketunggalan titik tetap dari suatu fungsi yang didefinisikan di ruang b-metrik yang lengkap.

Cara mengutip artikel ini:

Ahmad Khairul Umam, dkk, “EKSISTENSI DAN KETUNGGALAN TITIK TETAP HARDY DI RUANG *B*-METRIK LENGKAP,” *MathVision: Jurnal Matematika.*, vol. 07, iss. 01, pp. 22-28, 2025.

KONTAK:
Ahmad Khairul Umam ahmad.khairul.umam@gmail.com Program Studi Matematika FMIPA Universitas Billfath

Artikelnya dapat diakses di sini. *https://doi.org/10.55719/v7i1.1496*

1. PENDAHULUAN

Prinsip titik tetap berguna tidak hanya untuk menyelesaikan masalah persamaan linear dan persamaan differensial, tetapi juga persamaan integral [1]. Teorema titik tetap Banach merupakan teorema titik tetap yang banyak dikenal. Suatu titik tetap untuk fungsi kontraktif yang didefinisikan pada ruang metrik lengkap akan terjamin eksistensi dan ketunggalannya dengan adanya teorema titik tetap Banach. Banyak pengembangan dari teorema titik tetap Banach seperti teorema titik tetap Kannan, titik tetap Caristi, dan titik tetap Reich. Titik tetap Reich sendiri mengalami pengembangan yaitu titik tetap Hardy. Pada penelitian ini dibahas tentang titik tetap Hardy.

Ruang metrik telah mengalami banyak perluasan. Beberapa diantaranya yaitu ruang metrik kerucut (*cone*), ruang b-metrik, ruang metrik parsial, dan lain-lain [2], [3]. Sebelumnya teorema titik tetap Hardy dibahas di ruang metrik. Pada penelitian ini dibahas pengembangan teorema titik tetap Hardy di ruang b-metrik yang lengkap. Penelitian ini berguna untuk memperjelas pembuktian teorema baru tersebut. Ruang b-metrik yang lengkap berarti semua barisan Cauchy yang berada di ruang b-metrik tersebut konvergen. Aksioma ketaksamaan segitiga di ruang metrik tidak sama dengan aksioma ketaksamaan segitiga di ruang b-metrik. Ruang b-metrik adalah generalisasi dari ruang metrik. Di dalam aksioma ruang metrik terdapat ketaksamaan segitiga yaitu $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$. Sedangkan, aksioma ketaksamaan segitiga di ruang b-metrik adalah $d(x,z) \leq s[d(x,y) + d(y,z)]$ dimana $s \geq 1$.

Syarat ketaksamaan segitiga telah ditambahkan di ruang b-metrik yaitu dengan koefisien matriks [4]. Di samping itu, digunakan operator Picard lemah(*weak*) untuk membuktikan teorema yang berkaitan dengan titik tetap dalam generalisasi ruang b-metrik [5]. Diberikan ruang (X,d) merupakan generalisasi ruang b-metrik dan operator $f: X \longrightarrow X$, operator f disebut operator Picard lemah jika terdapat barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam X yang konvergen dan limit barisannya adalah titik tetap dari f. Perluasan teorema titik tetap Hardy dan teorema titik tetap Reich di ruang b-metrik telah dibuktikan [6]. Pada penelitian ini diberikan penjelasan yang lebih banyak untuk pembuktian lemma 3.1 dan teorema 3.4 [6]. Publikasi pembuktian teorema baru biasanya dijelaskan singkat oleh penulis sehingga memberikan penjelasan lebih banyak terhadap pembuktian teorema baru akan sangat berguna.

2. METODE

Metode yang digunakan di penelitian ini merupakan metode studi literatur (studi pustaka). Pada metode studi literatur dikumpulkan informasi lebih mendalam melalui buku, artikel, dan referensi lainnya. Hasil penelitian terdahulu yang relevan juga digunakan sebagai salah satu sumber informasi dalam metode ini sebagai landasan teori masalah yang akan diteliti.

Definisi 1 [7]. *Metrik di himpunan X adalah fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dimana memenuhi beberapa sifat sebagai berikut.*
M1. $d(x,y) \geq 0$ untuk setiap $x, y \in X$. (positivity)
M2. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$. (definiteness)
M3. $d(x,y) = d(y,x)$ untuk setiap $x, y \in X$. (symmetry)
M4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$. (triangle inequality)
Ruang metrik (X,d) merupakan suatu himpunan X bersama dengan metrik d di X.

Definisi 2 [8]. *Diberikan himpunan tidak kosong X dan $s \geq 1$ adalah bilangan real. Suatu fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dikatakan b-metrik jika untuk setiap $x, y, z \in X$ terpenuhi sifat-sifat:*
B1. $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.
B2. $d(x,y) = d(y,x)$.
B3. $d(x,z) \leq s[d(x,y) + d(y,z)]$.
Ruang b-metrik adalah pasangan (X,d).
[9] *Ketika $s = 1$, ruang yang dimaksud adalah ruang metrik.*

Definisi 3 [10]. *Suatu barisan $\langle x_n \rangle$ yang berada pada ruang b-metrik (X,d) dikatakan konvergen jika terdapat suatu titik $x \in X$ sedimikian rupa sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N(\varepsilon)$ berlaku*

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Definisi 4 [10]. *Barisan* $\langle x_n \rangle$ *yang berada pada ruang b-metrik* (X,d) *dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $n,m \geq N(\varepsilon)$ *berlaku*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Definisi 5 [11]. *Ruang b-metrik dikatakan lengkap jika semua barisan Cauchy di dalamnya konvergen.*

Definisi 6 [1]. *Suatu titik tetap dari fungsi* $f: X \to X$ *adalah titik* $x \in X$ *dimana* $f(x) = x$.

Teorema 1 [12]. *Diberikan suatu ruang metrik* (X,d) *dimana* d *adalah metrik. Selanjutnya diberikan fungsi* $f: X \longrightarrow X$ *dengan*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq ad\big(x, f(x)\big) + bd\big(y, f(y)\big) + cd\big(x, f(y)\big) + ed\big(y, f(x)\big) + fd(x,y)$$

untuk setiap $x, y \in X$ *dengan* a, b, c, e *dan* f *merupakan bilangan tak negatif sehingga* $\alpha = a + b + c + e + f$, *maka*

a. *Jika* X *adalah ruang metrik lengkap dan* $\alpha < 1$ *maka fungsi* f *memiliki titik tetap tunggal.*
b. *Jika (i) dimodifikasi dengan* $x \neq y$ *yang mengakibatkan*

$$d\big(f(x), f(y)\big) < ad\big(x, f(x)\big) + bd\big(y, f(y)\big) + cd\big(x, f(y)\big) + ed\big(y, f(x)\big) + fd(x,y)$$

dan untuk kasus ini diasumsikan X *adalah ruang metrik kompak,* f *adalah fungsi kontinu, dan* $\alpha = 1$ *maka* f *memiliki titik tetap tunggal.*

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Lemma 1. *Diberikan suatu ruang b-metrik lengkap* (X,d). *Selanjutnya diberikan fungsi* $f: X \longrightarrow X$ *dengan*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq ad\big(x, f(x)\big) + bd\big(y, f(y)\big) + cd\big(x, f(y)\big) + ed\big(y, f(x)\big) + fd(x,y) \quad (1)$$

untuk setiap $x, y \in X$ *dengan* a, b, c, e *dan* f *merupakan bilangan tak negatif serta* $\alpha = a + b + c + e + f$, *jika* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2s}\right)$ *untuk* $s \geq 1$ *maka terdapat* $0 < \beta < \frac{1}{2s}$ *sedemikian sehingga*

$$d\Big(f(x), f\big(f(x)\big)\Big) \leq \beta d\big(x, f(x)\big)$$

atau

$$d\big(f(x), f^2(x)\big) \leq \beta d\big(x, f(x)\big).$$

Bukti. Misalkan diberikan $f(x) = y$, sehingga pertidaksamaan (1) menjadi

$$d\Big(f(x), f\big(f(x)\big)\Big) \leq ad\big(x, f(x)\big) + bd\Big(f(x), f\big(f(x)\big)\Big) + cd\Big(x, f\big(f(x)\big)\Big) + ed\big(f(x), f(x)\big)$$
$$+ fd\big(x, f(x)\big)$$

atau

$$d\big(f(x), f^2(x)\big) \leq ad\big(x, f(x)\big) + bd\big(f(x), f^2(x)\big) + cd\big(x, f^2(x)\big) + ed\big(f(x), f(x)\big) + fd\big(x, f(x)\big)$$
$$= ad\big(x, f(x)\big) + bd\big(f(x), f^2(x)\big) + cd\big(x, f^2(x)\big) + +fd\big(x, f(x)\big)$$

bisa ditulis

$$d\big(f(x), f^2(x)\big) \leq ad\big(x, f(x)\big) + bd\big(f(x), f^2(x)\big) + cd\big(x, f^2(x)\big) + fd\big(x, f(x)\big)$$
$$d\big(f(x), f^2(x)\big) - bd\big(f(x), f^2(x)\big) \leq ad\big(x, f(x)\big) + cd\big(x, f^2(x)\big) + fd\big(x, f(x)\big)$$
$$(1-b)d\big(f(x), f^2(x)\big) \leq (a+f)d\big(x, f(x)\big) + cd\big(x, f^2(x)\big)$$
$$d\big(f(x), f^2(x)\big) \leq \frac{(a+f)}{(1-b)} d\big(x, f(x)\big) + \frac{c}{(1-b)} d\big(x, f^2(x)\big) \quad (2)$$

Dari ketaksamaan segitiga pada definisi 2 (aksioma B3 ruang *b*-metrik), kemudian disubstitusikan pertidaksamaan (2) sehingga menjadi

$$d\big(x, f^2(x)\big) \leq s\big[d\big(x, f(x)\big) + d\big(f(x), f^2(x)\big)\big]$$
$$\frac{1}{s} d\big(x, f^2(x)\big) \leq d\big(x, f(x)\big) + d\big(f(x), f^2(x)\big)$$
$$\frac{1}{s} d\big(x, f^2(x)\big) \leq d\big(x, f(x)\big) + \frac{(a+f)}{(1-b)} d\big(x, f(x)\big)$$
$$+ \frac{c}{(1-b)} d\big(x, f^2(x)\big)$$

$$\frac{1}{s}d(x,f^2(x)) - \frac{c}{(1-b)}d(x,f^2(x)) \leq d(x,f(x)) + \frac{(a+f)}{(1-b)}d(x,f(x))$$
$$\frac{1}{s}d(x,f^2(x)) \times \left(\frac{1-b}{1-b}\right) - \frac{c}{(1-b)}d(x,f^2(x)) \times \left(\frac{s}{s}\right) \leq d(x,f(x)) \times \left(\frac{1-b}{1-b}\right) + \frac{(a+f)}{(1-b)}d(x,f(x))$$
$$\frac{1-b}{s(1-b)}d(x,f^2(x)) - \frac{cs}{s(1-b)}d(x,f^2(x)) \leq \frac{(1-b)}{(1-b)}d(x,f(x)) + \frac{(a+f)}{(1-b)}d(x,f(x))$$

$$\frac{1-b-cs}{s(1-b)}d(x,f^2(x)) \leq \frac{(1-b+a+f)}{(1-b)}d(x,f(x))$$
$$\frac{1-b-cs}{s}d(x,f^2(x)) \leq (1-b+a+f)d(x,f(x))$$
$$d(x,f^2(x)) \leq \frac{s(1-b+a+f)}{1-b-cs}d(x,f(x)) \tag{3}$$

Substitusikan pertidaksamaan (3) ke pertidaksamaan (2), sehingga menjadi

$$d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(a+f)}{(1-b)}d(x,f(x)) + \frac{c}{(1-b)}d(x,f^2(x))$$
$$d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(a+f)}{(1-b)}d(x,f(x)) \times \frac{1-b-cs}{1-b-cs} + \frac{c}{(1-b)}\frac{s(1-b+a+f)}{1-b-cs}d(x,f(x))$$
$$d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(a+f)(1-b-cs)}{(1-b)(1-b-cs)}d(x,f(x)) + \frac{1}{(1-b)}\frac{cs(1-b+a+f)}{1-b-cs}d(x,f(x))$$
$$d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(a-ab-acs+f-bf-cfs)}{(1-b)(1-b-cs)}d(x,f(x)) + \frac{(cs-bcs+acs+cfs)}{(1-b)(1-b-cs)}d(x,f(x))$$
$$d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(a-ab+f-bf+cs-bcs)}{(1-b)(1-b-cs)}d(x,f(x))$$
$$d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(a+f+cs-ab-bf-bcs)}{(1-b)(1-b-cs)}d(x,f(x))$$
$$d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(1-b)(a+f+cs)}{(1-b)(1-b-cs)}d(x,f(x))d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(a+f+cs)}{(1-b-cs)}d(x,f(x)) \tag{4}$$

Pertidaksamaan (1) yaitu

$$d(f(x),f(y)) \leq ad(x,f(x)) + bd(y,f(y)) + cd(x,f(y)) + ed(y,f(x)) + fd(x,y)$$

dari sifat simetri pada definisi 2 (aksioma B2 ruang b-metrik), pertidaksamaan (1) menjadi

$$d(f(y),f(x)) \leq ad(y,f(y)) + bd(x,f(x)) + cd(y,f(x)) + ed(x,f(y)) + fd(y,x)$$

sehingga nilai c dapat diganti e, a dapat diganti b begitu juga sebaliknya. Pada pertidaksamaan (4), jika c diganti e, a diganti b, dan b diganti a menjadi

$$d(f(x),f^2(x)) \leq \frac{(b+f+es)}{(1-a-es)}d(x,f(x))$$

pilih

$$\beta = \min\left\{\frac{(a+f+cs)}{(1-b-cs)}, \frac{(b+f+es)}{(1-a-es)}\right\}$$

sehingga

$$d(f(x),f^2(x)) \leq \beta d(x,f(x)).$$

Teorema 2. *Diberikan suatu ruang b-metrik lengkap* (X,d). *Selanjutnya diberikan fungsi* $f: X \longrightarrow X$ *dengan*

$$d(f(x),f(y)) \leq ad(x,f(x)) + bd(y,f(y)) + cd(x,f(y)) + ed(y,f(x)) + fd(x,y) \tag{5}$$

untuk setiap $x,y \in X$ *dengan* a,b,c,e *dan* f *merupakan bilangan tak negatif serta* $\alpha = a+b+c+e+f$, *sehingga* $\alpha \in \left(0,\frac{1}{2s}\right)$ *untuk* $s \geq 1$ *maka* f *memiliki titik tetap tunggal.*

Bukti. Ambil $x_0 \in X$, selanjutnya dibentuk barisan $\langle x_n \rangle$ dimana suku-sukunya adalah

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), \dots,$$
$$x_n = f(x_{n-1}) = f(f(x_{n-2})) = f^2(x_{n-2}) = \dots = f^n(x_0).$$

Berdasarkan lemma 1, selanjutnya akan ditunjukkan barisan $\langle x_n \rangle$ adalah barisan Cauchy.

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}),f(x_n))$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \beta d(x_{n-1}, x_n) \\
&= \beta d\big(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})\big) \\
&\leq \beta^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\quad\vdots \\
&\leq \beta^n d(x_0, x_1) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan ketaksamaan segitiga pada definisi 2 (aksioma B3 ruang b-metrik) dan pertidaksamaan (6), untuk $m > n$ maka

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq s[d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m)] \\
&= sd(x_n, x_{n+1}) + sd(x_{n+1}, x_m) \\
&\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s(s[d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m)]) \\
&= sd(x_n, x_{n+1}) + s^2[d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m)] \\
&= sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2 d(x_{n+2}, x_m) \\
&\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^2(s[d(x_{n+2}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_m)]) \\
&= sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3[d(x_{n+2}, x_{n+3}) + d(x_{n+3}, x_m)] \\
&= sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + s^3 d(x_{n+3}, x_m) \\
&\quad\vdots \\
&\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3 d(x_{n+2}, x_{n+3}) + s^4 d(x_{n+3}, x_{n+4}) + \cdots \\
&\leq s\beta^n d(x_0, x_1) + s^2\beta^{n+1} d(x_0, x_1) + s^3\beta^{n+2} d(x_0, x_1) + s^4\beta^{n+3} d(x_0, x_1) + \cdots
\end{aligned}
$$

karena nilai β adalah $0 < \beta < \frac{1}{2s}$ dimana $s \geq 1$, maka untuk $n \to \infty$ berlaku

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq s\beta^n d(x_0, x_1) + s^2\beta^{n+1} d(x_0, x_1) + s^3\beta^{n+2} d(x_0, x_1) + s^4\beta^{n+3} d(x_0, x_1) + \cdots \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

sehingga barisan $\langle x_n \rangle$ merupakan suatu barisan Cauchy.

Karena (X, d) adalah ruang b-metrik lengkap, maka semua barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ yang berada pada ruang tersebut konvergen, anggap $x_n \to x$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa x adalah titik tetap dari fungsi f. Dari sifat ketaksamaan segitiga pada definisi 2 (aksioma B3 ruang b-metrik) dan pertidaksamaan (5), diperoleh:

$$
\begin{aligned}
d\big(x, f(x)\big) &\leq s[d(x, x_n) + d(x_n, f(x))] \\
&= s[d(x, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(x))] \\
&\leq s[d(x, x_n) + ad\big(x_{n-1}, f(x_{n-1})\big) + bd\big(x, f(x)\big) + cd\big(x_{n-1}, f(x)\big) + ed\big(x, f(x_{n-1})\big) \\
&\quad + fd(x_{n-1}, x)] \\
&= s[d(x, x_n) + ad(x_{n-1}, x_n) + bd\big(x, f(x)\big) + cd\big(x_{n-1}, f(x)\big) + ed(x, x_n) + fd(x_{n-1}, x)] \\
&= s[(1+e)d(x, x_n) + ad(x_{n-1}, x_n) + bd\big(x, f(x)\big) + cd\big(x_{n-1}, f(x)\big) + fd(x_{n-1}, x)]
\end{aligned}
$$

Karena barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen, maka untuk $n \to \infty$ berlaku

$$
\begin{aligned}
d\big(x, f(x)\big) &\leq s[(1+e)d(x, x_n) + ad(x_{n-1}, x_n) + bd\big(x, f(x)\big) + cd\big(x_{n-1}, f(x)\big) + fd(x_{n-1}, x)] \\
&= s\big[(1+e)d(x, x) + ad(x, x) + bd\big(x, f(x)\big) + cd\big(x, f(x)\big) + fd(x, x)\big] \\
&= s\big[(1+e)(0) + a(0) + bd\big(x, f(x)\big) + cd\big(x, f(x)\big) + f(0)\big] \\
&= s\big[0 + 0 + bd\big(x, f(x)\big) + cd\big(x, f(x)\big) + 0\big] \\
&= s\big[bd\big(x, f(x)\big) + cd\big(x, f(x)\big)\big] \\
&= s(b + c)d\big(x, f(x)\big)
\end{aligned}
$$

atau dapat ditulis

$$d\big(x, f(x)\big) \leq s(b + c)d\big(x, f(x)\big) \qquad (7)$$

hal ini kontradiktif karena a, b, c, e dan f merupakan bilangan tak negatif serta $\alpha = a + b + c + e + f$ dimana $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2s}\right)$ untuk $s \geq 1$. Oleh karena itu haruslah $b = c = 0$, sehingga pertidaksamaan (7) menjadi

$$
\begin{aligned}
d\big(x, f(x)\big) &\leq s(b + c)d\big(x, f(x)\big) \\
d\big(x, f(x)\big) &\leq s(0 + 0)d\big(x, f(x)\big) \\
d\big(x, f(x)\big) &\leq s(0)d\big(x, f(x)\big) \\
d\big(x, f(x)\big) &\leq 0 \\
d\big(x, f(x)\big) &= 0
\end{aligned}
$$

oleh karena itu $x = f(x)$. Jadi titik x adalah titik tetap dari suatu fungsi f.

Misalkan x, y adalah titik tetap dari fungsi f sehingga $x = f(x)$ juga $y = f(y)$. Berdasarkan pertidaksamaan (5) maka

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d\big(f(x), f(y)\big) \\ &\leq ad\big(x, f(x)\big) + bd\big(y, f(y)\big) + cd\big(x, f(y)\big) + ed\big(y, f(x)\big) + fd(x,y) \\ &= ad(x,x) + bd(y,y) + cd(x,y) + ed(y,x) + fd(x,y) \\ &= a(0) + b(0) + cd(x,y) + ed(y,x) + fd(x,y) \\ &= 0 + 0 + cd(x,y) + ed(y,x) + fd(x,y) \\ &= cd(x,y) + ed(y,x) + fd(x,y) \\ &= cd(x,y) + ed(x,y) + fd(x,y) \\ &= (c+e+f)d(x,y) \end{aligned}$$

atau dapat dtulis

$$d(x,y) \leq (c+e+f)d(x,y) \tag{8}$$

hal ini kontradiktif karena a, b, c, e dan f merupakan bilangan tak negatif serta $\alpha = a + b + c + e + f$ dimana $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2s}\right)$ untuk $s \geq 1$. Oleh karena itu haruslah $c = e = f = 0$, sehingga pertidaksamaan (8) menjadi

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq (c+e+f)d(x,y) \\ d(x,y) &\leq (0+0+0)d(x,y) \\ d(x,y) &\leq (0)d(x,y) \\ d(x,y) &\leq 0 \\ d(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

berdasarkan definisi 2 (aksioma B1 ruang b-metrik) didapatkan $y = x$. Jadi terbukti bahwa fungsi f mempunyai titik tetap tunggal.

4. KESIMPULAN

Titik tetap Hardy merupakan pengembangan dari titik tetap Reich. Ruang metrik banyak generalisasinya. Salah satu perluasan dari ruang metrik adalah ruang b-metrik. Aksioma ketaksamaan segitiga di ruang metrik tidak sama dengan aksioma ketaksamaan segitiga di ruang b-metrik.

Jika diberikan suatu ruang b-metrik lengkap (X, d) dan fungsi $f: X \longrightarrow X$ dengan $d\big(f(x), f(y)\big) \leq ad\big(x, f(x)\big) + bd\big(y, f(y)\big) + cd\big(x, f(y)\big) + ed\big(y, f(x)\big) + fd(x,y)$ untuk setiap $x, y \in X$ dimana a, b, c, e dan f merupakan bilangan tak negatif serta $\alpha = a + b + c + e + f$ sehingga $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2s}\right)$ untuk $s \geq 1$, maka f memiliki titik tetap tunggal.

Pada penelitian selanjutnya disarankan untuk mempelajari teorema titik tetap yang berlaku di ruang lain. Selain itu juga mempelajari ruang b-metrik yang diperpanjang (*extended*) dan b-metrik kerucut (*cone*) yang diperpanjang (*extended*).

UCAPAN TERIMA KASIH

Ucapan terima kasih disampaikan kepada Lembaga Penelitian dan Pengabdian kepada Masayakat (LPPM) Universitas Billfath atas dukungan dana yang diberikan.

REFERENSI

[1] E. Kreyszig, "Introductory Functional Analysis with Applications," John Wiley & Sons, 1978.

[2] S. Akbar, M. Kiftiah, and Yudi, "Teorema Titik Tetap pada Ruang Metrik Cone," *Bulletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster)*, vol. 5, no. 2, pp. 261-266, 2016.

[3] M. I. D. Firmansyah, E. Apriliani, and M. Yunus, "Konvergensi Barisan dan Kelengkapan pada Ruang Metrik Parsial Rectangular," *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, vol. 20, no. 1, pp. 1-10, 2023.

[4] M. Boricenau, "Fixed Point Theory on Spaces with Vector-Valued b-Metrics," *Demonstratio Mathematica*, vol. 42, no. 4, pp. 825-835, 2009.

[5] R. I. Petre and M. Bota, "Fixed Point Theorems on Generalized b-Metric Spaces," *Publ. Math. Debrecen*, vol. 83, no. 1-2, pp. 139-159, 2013.

[6] P. K. Mishra, S. Sachdeva, and S. K. Banerjee, "Some Fixed Point Theorems in b-Metric Space,"

Turkish Journal of Analysis and Number Theory, vol. 2, no. 1, pp. 19-22, 2023.

[7] R. G. Bartle and D. R. Sherbert, "Introduction to Real Analysis," John Wiley & Sons, Inc., 2011.

[8] P. K. B. Prajapati and R. Bhardwaj, "Fixed Point Theorems in Bi-b-Metric Spaces," *Mathematical Analysis and Its Contemporary Applications*, vol. 5, no. 2, pp. 73–81, 2023.

[9] P. Thirunavukarasu and M. Uma, "Fixed Point Theorems in b-Metric Space," *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, vol. 21, no. 8, pp. 4467–4474, 2022.

[10] S. Agrawal, K. Qureshi, and J. Nema, "A Fixed Point Theorem for b-Metric Space," *International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences*, vol. 9, no. 1, pp. 45–50, 2016.

[11] D. Hasanah, "Fixed Point Theorems in Complex-Valued b-Metric Spaces," *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, vol. 4, no. 4, pp. 138–145, 2017.

[12] G. E. Hardy and T. D. Rogers, "A Generalization of a Fixed Point Theorem of Reich," *Canad. Math. Bull.*, vol. 16, no. 2, pp. 201–206, 1973.