



## PENERAPAN METODE *EXTENDED KALMAN FILTER* PADA KASUS PERTUMBUHAN PENDUDUK KABUPATEN JEMBER

Kosala Dwidja Purnomo<sup>1</sup>, Rory Ronella Agustin<sup>2</sup>, Alfian Futuhul Hadi<sup>3</sup>  
Program Studi Matematika FMIPA Universitas Jember  
Jl. Kalimantan 37, Jember 68121  
[kosala.fmipa.unej.ac.id](mailto:kosala.fmipa.unej.ac.id)<sup>1</sup>, [roryronella@yahoo.co.id](mailto:roryronella@yahoo.co.id)<sup>2</sup>, [afhadi@unej.ac.id](mailto:afhadi@unej.ac.id)<sup>3</sup>

**Abstrak** – Penelitian ini membahas estimasi jumlah penduduk Kabupaten Jember menggunakan metode *Extended Kalman Filter* (EKF) dan menentukan model pertumbuhan logistik yang sesuai untuk prediksi pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember. Terdapat dua asumsi model pertumbuhan logistik yang akan dibandingkan yaitu model pertumbuhan logistik dengan asumsi fungsi populasi linier dan model pertumbuhan dengan asumsi fungsi populasi parabolik. Proses percobaan dilakukan sebanyak tiga kali, yaitu menggunakan 6, 14, 28 data pengukuran untuk mengetahui efisiensi metode *Extended Kalman Filter*. Data pengukuran yang digunakan adalah data jumlah penduduk Kabupaten Jember tahun 1990-2017 yang berasal dari buku atau laporan yang diterbitkan oleh Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Timur. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa model pertumbuhan logistik dengan asumsi fungsi populasi parabolik lebih sesuai dengan pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember dalam jangka waktu tahun 1990-2017 dibandingkan model pertumbuhan logistik dengan asumsi fungsi populasi linier. Metode *Extended Kalman Filter* mampu meningkatkan tingkat kepercayaan hasil estimasi ditunjukkan dengan rata-rata norm kovariansi error yang semakin kecil. Semakin banyak data pengukuran yang digunakan, hasil estimasi menggunakan metode *Extended Kalman Filter* semakin baik dan mendekati data sebenarnya.

**Kata Kunci** – *Extended Kalman Filter* (EKF), pertumbuhan penduduk, fungsi populasi.

### I. PENDAHULUAN

Pertumbuhan penduduk adalah perubahan jumlah penduduk di suatu wilayah tertentu pada waktu tertentu dibandingkan waktu sebelumnya.

Pertumbuhan penduduk sebenarnya merupakan keseimbangan dinamis antara dua kekuatan besar yang menambah atau mengurangi jumlah penduduk. Jumlah penduduk yang besar merupakan suatu hal positif karena dapat dijadikan sebagai subjek pembangunan, dan perkembangan perekonomian. Namun di sisi lain, penduduk merupakan beban bagi pembangunan berkaitan dengan pemenuhan kebutuhan seiring dengan perkembangan jumlah penduduk tersebut [1].

Pengaruh jumlah penduduk telah banyak diteliti diantaranya oleh [2] tentang analisis faktor yang mempengaruhi tingkat pengangguran yang menghasilkan kesimpulan jumlah penduduk, inflasi upah minimum, indeks pembangunan manusia berpengaruh signifikan terhadap tingkat pengangguran di Kabupaten Jember. Jumlah penduduk ternyata memiliki pengaruh penting diantaranya dalam hal tingkat pengangguran dan pertumbuhan ekonomi, sehingga perlu adanya estimasi jumlah penduduk sebagai salah satu cara sebagai perencanaan kesejahteraan masyarakat. Pertumbuhan penduduk dapat diestimasi menggunakan Analisis Kalman Filter.

Kalman Filter merupakan suatu metode yang digunakan untuk melakukan estimasi suatu nilai. *Extended Kalman Filter* merupakan salah satu modifikasi dari Algoritma Kalman Filter. Hasil penelitian sebelumnya, [3] tentang Kalman Filter mengestimasi pertumbuhan populasi plankton menyatakan penggunaan metode *Extended Kalman Filter* lebih cocok digunakan dalam pengestimasian daripada metode *Ensemble Kalman Filter* pada sebagian variabel tertentu.

Pada penelitian ini metode *Extended Kalman Filter* diaplikasikan untuk mengestimasi pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember. Estimasi ini dilakukan dengan membandingkan

dua asumsi model antara lain model persamaan pertumbuhan logistik dengan asumsi parabolik terbuka ke bawah yang telah diteliti oleh [4] dan model persamaan linier. Tujuan dari perbandingan asumsi dua model tersebut adalah untuk menentukan asumsi model yang sesuai dengan pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember.

## II. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan pemecahan masalah tentang penerapan metode *Extended Kalman Filter* pada kasus pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember dalam tujuannya mengetahui model pertumbuhan logistik yang sesuai dengan pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember dan mengetahui efektivitas metode *Extended Kalman Filter* dalam estimasi pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember. Langkah pertama yang dilakukan adalah melakukan perhitungan untuk menentukan laju pertumbuhan ( $r$ ) dan ambang batas populasi ( $K$ ). Langkah berikutnya adalah melakukan proses diskritisasi model pertumbuhan logistik linier. Model diskrit yang masih berbentuk deterministik diubah menjadi model stokastik dengan cara menambahkan *noise* pada sistem dan pengukuran. Langkah selanjutnya adalah menghitung matriks jacobian  $A$  dan dilanjutkan dengan penerapan metode *Extended Kalman Filter* menggunakan Matlab R2015b.

### Penentuan $r$ dan $K$

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data yang digunakan dalam penelitian ini antara lain, data jumlah penduduk Kabupaten Jember yang berupa deret berkala (*time series*) selama periode tahun 1991 sampai dengan tahun 2017, data produksi beras tahun 2017, data luas daerah Kabupaten Jember. Berikut merupakan data jumlah penduduk yang diperoleh dari Badan Pusat Statistik Provinsi Jawa Timur.

Laju pertumbuhan tersebut merupakan nilai rata-rata dari laju pertumbuhan setiap tahun. Laju pertumbuhan setiap tahun dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$r = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}$$

$$r = 0,005897$$

Ambang batas populasi didapatkan dengan menggunakan luas daerah Kabupaten Jember. Menentukan nilai ambang batas populasi menggunakan luas daerah, didapatkan dengan cara sebagai berikut:

$$K = \frac{\text{Luas daerah Kabupaten Jember}}{\text{Luas tempat tinggal minimum tiap individu}}$$

$$K = \frac{3.293.340.000 \text{ m}^2}{100 \text{ m}^2/\text{jiwa}}$$

$$= 32.933.400 \text{ jiwa}$$

Persamaan berikut setelah laju pertumbuhan ( $r$ ) dan ambang batas populasi ( $K$ ) disubstitusikan adalah sebagai berikut:

$$N(t) = \frac{32.933.400}{1 + e^{-0,005897t} C(32.933.400)}$$

$$N(t) = \sqrt{\frac{32.933.400^2}{1 + 2(0,005897)e^{-2(0,005897)t} C}}$$

### Diskritisasi Model Fungsi Populasi Linier

Hasil diskritisasi model fungsi populasi linier adalah sebagai berikut:

$$\left( rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t) \right) \Delta t + N_k = N_{k+1}$$

Untuk mempermudah perhitungan, persamaan fungsi populasi dapat ditulis dengan notasi sebagai berikut:

$$f_{k+1} = \begin{bmatrix} M_{k+1} \\ N_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( rM(t) - \frac{r}{K}M^2(t) \right) \Delta t + M_k \\ \left( -\frac{r}{K^2}N_k^3 + rN_k \right) \Delta t + N_k \end{bmatrix}$$

### Perhitungan matriks jacobian dan penambahan *noise*

Matriks Jacobian atau *Jacobian* adalah sebuah matriks yang memuat semua turunan-turunan parsial derajat pertama dari fungsi bernilai vektor atau skalar yang menghubungkan vektor lainnya. Setelah dilakukan proses diskritisasi pada model pertumbuhan logistik linier, langkah selanjutnya adalah menghitung matriks Jacobian  $A = [A_{i,j}]$ . Misalkan  $M_{k+1} = f_1$  dan  $N_{k+1} = f_2$ , matriks Jacobian  $A$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial M} & \frac{\partial f_1}{\partial N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial M} & \frac{\partial f_2}{\partial N} \end{bmatrix}$$

persamaan diatas mendapatkan hasil sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \left(r - 2\frac{r}{K}M(t)\right)\Delta t + 1 & 0 \\ 0 & \left(r - 3\frac{r}{K^2}N^2(t)\right)\Delta t + 1 \end{bmatrix}$$

Penambahan *noise* dilakukan dengan cara membangkitkan sejumlah bilangan acak dari komputer melalui program Matlab R2015b. *Noise* untuk model sistem dibangkitkan menggunakan formula  $w = \text{normrnd}(0, \text{sqrt}(\text{sigQ}), 2, 1)$  dan *noise* untuk model pengukuran dibangkitkan menggunakan formula  $v = \text{normrnd}(0, \text{sqrt}(\text{sigR}), 2, 1)$ .

### Penerapan metode *Extended Kalman Filter*

Sesuai algoritma *Extended Kalman Filter*, langkah-langkah metode EKF pada model pertumbuhan logistik pada kasus pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember sebagai berikut:

1. Menentukan model sistem dan pengukuran

Model sistem yang digunakan pada proses estimasi dalam metode EKF merupakan model stokastik. Berikut merupakan model sistem dan model pengukuran yang digunakan dalam algoritma *Extended Kalman Filter*:

$$M_{k+1} = \left(rM(t) - \frac{r}{K}M^2(t)\right)\Delta t + M_k + w1_k$$

$$N_{k+1} = \left(-\frac{r}{K^2}N_k^3 + rN_k\right)\Delta t + N_k + w2_k$$

$$z1_k = HM_k + v_k$$

$$z2_k = HN_k + v_k$$

Pada persamaan diatas, diasumsikan  $w_k, v_k$  adalah *white noise*, tidak berkorelasi, dan berdistribusi normal, dengan

$$E\{w_k\} = 0$$

$$\text{Cov}\{w_k, w_k\} = E(w_k, w_k)^T = Q$$

dan

$$E\{v_k\} = 0$$

$$\text{Cov}\{v_k, v_k\} = E(v_k, v_k)^T = R$$

sehingga dapat ditulis

$$w_k \sim N(0, Q);$$

$$v_k \sim N(0, R)$$

dengan  $Q$  dan  $R$  adalah variansi dari *noise*.

2. Inisialisasi atau nilai awal saat  $t = 0$

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_{M_0} & 0 \\ 0 & P_{N_0} \end{bmatrix}; \hat{M}_0 = \bar{M}_0; \hat{N}_0 = \bar{N}_0$$

Nilai awal kovariansi error  $P_0$  berupa matriks berordo  $2 \times 2$  dengan elemen-elemen diagonal utama  $P_{M_0}$  dan  $P_{N_0}$  serta elemen-elemen lainnya bernilai nol, dimana  $P_{M_0}$  dan  $P_{N_0}$  diberi nilai 0.001. Variansi  $Q$  dan  $R$  masing-masing diberikan nilai 0.001. Peubah  $\bar{M}_0$  dan  $\bar{N}_0$  masing-masing didefinisikan sebagai jumlah awal penduduk saat  $t = 0$ , dengan inisialisasi  $\bar{M}_0 = \bar{N}_0 = 2.036.792$ .

3. Tahap prediksi (*time update*)

Langkah-langkah pada tahap prediksi yang akan dilakukan proses prediksi terhadap variabel keadaan menggunakan persamaan berikut:

$$\hat{M}^-_{k+1} = \left(rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t)\right)\Delta t + M_k$$

$$\hat{N}^-_{k+1} = \left(-\frac{r}{K^2}N_k^3 + rN_k\right)\Delta t + N_k$$

Pada tahap prediksi, selain mencari nilai estimasi akan ditentukan juga nilai kovariansi error yang digunakan sebagai alat ukur ketelitian dari hasil estimasi. Nilai dari kovariansi error akan digunakan pada tahap prediksi. Persamaannya adalah sebagai berikut:

$$P^-_{k+1} = AP_kA^T + Q$$

4. Tahap koreksi (*measurement update*)

Langkah pertama yang dilakukan pada tahap koreksi yaitu menghitung data pengukuran  $z_k$ . Data pengukuran yang digunakan dalam sistem *real* ditambah dengan *noise* pengukuran untuk masing-masing model. Nilai data pengukuran yang diperoleh digunakan untuk memperbaiki hasil estimasi pada tahap prediksi.

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai matriks *Kalman gain*, dengan persamaan sebagai berikut:

$$K_{k+1} = P^-_{k+1}H^T(HP^-_{k+1}H^T + R)^{-1}$$

dengan  $H$  adalah matriks identitas berordo  $2 \times 2$ . Kalman gain digunakan untuk meminimumkan kovariansi *error* pada tahap prediksi. Pada tahap koreksi juga terdapat nilai estimasi. Perbedaan nilai estimasi pada tahap prediksi dan tahap koreksi adalah nilai estimasi pada tahap koreksi ditambah dengan matriks *kalman gain* yang dikalikan dengan  $(z_{k+1} - H\hat{x}_{k+1}^-)$  untuk masing-masing model, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

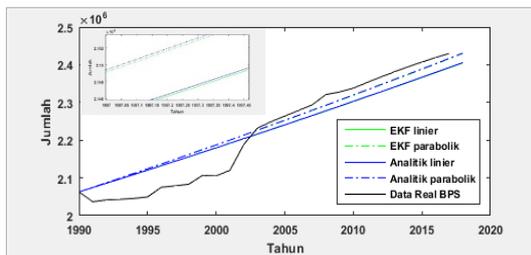
$$\begin{aligned}\hat{M}_{k+1} &= \hat{M}_{k+1}^- + K_{k+1}(z_{1k+1} - H\hat{M}_{k+1}^-) \\ \hat{N}_{k+1} &= \hat{N}_{k+1}^- + K_{k+1}(z_{2k+1} - H\hat{N}_{k+1}^-)\end{aligned}$$

Nilai kovariansi error pada tahap koreksi ditentukan oleh persamaan berikut:

$$P_{k+1} = [I - K_{k+1}H]P_{k+1}^-$$

## Hasil Estimasi

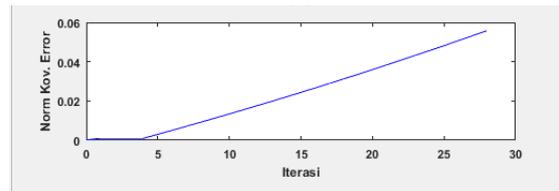
### 1. Hasil Estimasi dengan 6 data pengukuran



Gambar 1. Hasil estimasi  $N(t = 6)$

Hasil pada gambar diatas menunjukkan bahwa solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF dari fungsi populasi parabolik lebih mendekati data *real* BPS dibandingkan solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF dari fungsi populasi linier. Rata-rata absolut error antara hasil estimasi solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF untuk asumsi fungsi populasi parabolik masing-masing adalah 35065,8 dan 35928 lebih kecil dibandingkan rata-rata absolut error antara hasil estimasi solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF untuk asumsi fungsi populasi linier yang bernilai 42574 dan 42835,8. Sehingga hasil estimasi dengan asumsi fungsi populasi parabolik lebih mendekati nilai data *real* BPS dalam simulasi menggunakan 6 data pengukuran.

### 2. Norm Kovariansi error metode EKF

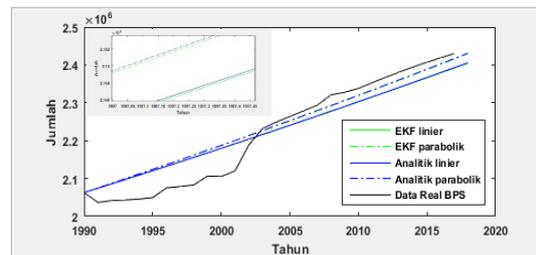


Gambar 2. Norm Kovariansi Error metode EKF  $N(t = 6)$

Norm kovariansi error dalam penelitian ini memiliki rata-rata 0,022477. Norm kovariansi error tersebut cukup kecil sehingga hal ini berarti penggunaan metode EKF cukup efektif dalam mengestimasi jumlah penduduk Kabupaten Jember.

### 3. Hasil estimasi dengan 14 data pengukuran

Visualisasi grafik nilai estimasi jumlah penduduk dengan 14 data pengukuran. menggunakan metode *Extended Kalman Filter* seperti pada Gambar 3. berikut:

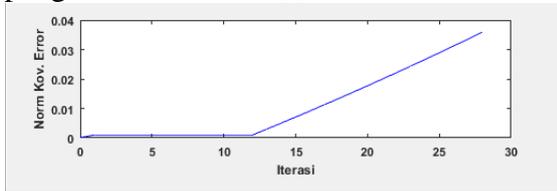


Gambar 3. Grafik Hasil Estimasi  $N(t = 14)$

Hasil pada Gambar 3. menunjukkan bahwa solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF dari fungsi populasi parabolik lebih mendekati data *real* BPS dibandingkan solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF dari fungsi populasi linier. Rata-rata absolut error antara hasil estimasi solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF untuk asumsi fungsi populasi parabolik masing-masing adalah 35605,8 dan 35927,9 lebih kecil dibandingkan rata-rata absolut error antara hasil estimasi solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF untuk asumsi fungsi populasi linier yang bernilai 42574 dan 42835,7. Sehingga hasil estimasi dengan asumsi fungsi populasi parabolik lebih mendekati nilai data *real* BPS dalam simulasi menggunakan 14 data pengukuran.

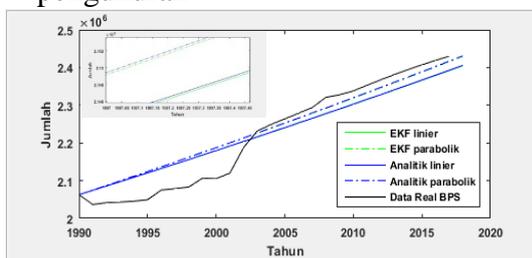
4. Norm Kovariansi error metode EKF

Berikut adalah visualisasi grafik norm kovariansi error menggunakan metode *Extended Kalman Filter* dengan 14 data pengukuran.



Gambar 4. Norm Kovariansi Error metode EKF  $N(t = 14)$

5. Hasil estimasi dengan 28 data pengukuran

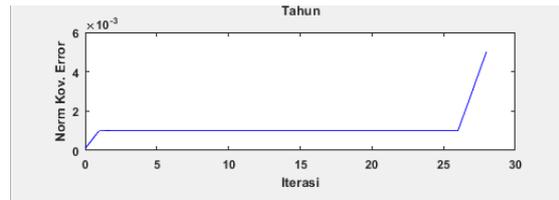


Gambar 5. Grafik Hasil Estimasi  $N(t = 28)$

Hasil pada Gambar 5. menunjukkan bahwa solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF dari fungsi populasi parabolik lebih mendekati data *real* BPS dibandingkan solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF dari fungsi populasi linier. Rata-rata absolut error antara hasil estimasi solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF untuk asumsi fungsi populasi parabolik masing-masing adalah 35605,8 dan 35926,9 lebih kecil dibandingkan rata-rata absolut error antara hasil estimasi solusi analitik dan hasil estimasi metode EKF untuk asumsi fungsi populasi linier yang bernilai 42574 dan 42834,4. Sehingga hasil estimasi dengan asumsi fungsi populasi parabolik lebih mendekati nilai data *real* BPS dalam simulasi menggunakan 28 data pengukuran dibandingkan hasil estimasi menggunakan 14 data pengukuran dan 6 data pengukuran.

6. Norm Kovariansi error metode EKF

Berikut adalah visualisasi grafik norm kovariansi error menggunakan metode *Extended Kalman Filter* dengan 28 data pengukuran.



Gambar 6. Grafik Hasil Estimasi  $N(t = 28)$

Norm kovariansi error dalam penelitian ini memiliki rata-rata 0,0010406. Norm kovariansi error tersebut lebih kecil dibandingkan norm kovariansi error menggunakan 6 data pengukuran dan 14 data pengukuran. Sehingga hasil estimasi jumlah penduduk menggunakan 28 data pengukuran lebih baik dibandingkan hasil estimasi menggunakan 6 data pengukuran dan 14 data pengukuran.

III. KESIMPULAN

**Kesimpulan**

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan dari hasil analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut:

- a. Model pertumbuhan logistik dengan asumsi fungsi populasi parabolik lebih sesuai dengan pertumbuhan penduduk Kabupaten Jember selama periode tahun 1990-2017 karena absolut error model dengan asumsi fungsi populasi parabolik lebih kecil dibandingkan absolut error model dengan asumsi fungsi populasi linier dalam tiga hasil simulasi menggunakan 6 , 14 dan 28 data pengukuran.
- b. Hasil estimasi jumlah penduduk menggunakan metode *Extended Kalman Filter* memiliki tingkat kepercayaan yang cukup baik. Hal ini ditunjukkan dengan hasil norm kovariansi error yang memiliki rata-rata 0,022477 saat menggunakan 6 data pengukuran, 0,010042 saat menggunakan 14 data pengukuran, 0,0010406 saat menggunakan 28 data pengukuran. Semakin banyak data pengukuran yang digunakan, hasil estimasi yang dihasilkan semakin baik dan mendekati data sebenarnya.

## Saran

Pada tulisan ini, estimasi jumlah penduduk Kabupaten Jember menggunakan metode *Extended Kalman Filter*, untuk penelitian selanjutnya estimasi dapat dilakukan menggunakan metode lain untuk mengetahui metode yang dapat memberikan hasil estimasi yang lebih baik.

## REFERENSI

- [1] Rochaida, E. 2016. Dampak Pertumbuhan Penduduk Terhadap Pertumbuhan Ekonomi dan Keluarga Sejahtera di Provinsi Kalimantan Timur. *Forum Ekonomi*.18(1):14-24
- [2] Firdhania, R dan F.Muslihatinningsih. 2017. Faktor-faktor yang Mempengaruhi Tingkat Pengangguran di Kabupaten Jember. *e-Journal Ekonomi Bisnis dan Akuntansi*. 4(1):117-121.
- [3] Purnomo, K.D. dan E. Apriliani. 2008. Estimasi Populasi Plankton dengan Ensemble Kalman Filter. *Jurnal Ilmu Dasar*. 9(1):38-44.
- [4] Fitriani, V.N dan K.D.Purnomo. 2013. Solution Estimation of Logistic Growth Model with Ensemble Kalman Filter Method. *Jurnal Ilmu Dasar*.14(2):85–90.