



OPTIMISASI MATRIKS BOBOT PADA *LINEAR QUADRATIC REGULATOR (LQR) INVERTED PENDULUM* MENGGUNAKAN *ANT COLONY OPTIMIZATION*

Dinita Rahmalia

Universitas Islam Darul Ulum Lamongan, dinitarahmalia@gmail.com

Abstrak – Inverted pendulum terdiri dari kereta dan pendulum yang terpasang pada kereta. Suatu gaya (force) diberikan pada sistem yang terdiri dari posisi sudut, kecepatan sudut, posisi kereta, dan kecepatan kereta. Fungsi objective dari inverted pendulum adalah meminimumkan sudut pendulum dan posisi kereta sesuai trayektori supaya pendulum stabil. Model kontrol optimal yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan Linear Quadratic Regulator (LQR). Pada LQR, nilai dari fungsi objective ditentukan oleh matriks bobot dan matriks bobot secara umum ditentukan secara trial and error. Ant Colony Optimization (ACO) merupakan metode optimisasi yang berdasarkan perilaku semut dalam mencari jalan dari sarang menuju sumber makanan. Hasil simulasi menunjukkan metode ACO dapat menemukan matriks bobot optimum yang meminimumkan performance index sebagai fungsi objective.

Kata Kunci – Kontrol Optimal, *Linear Quadratic Regulator*, *Ant Colony Optimization*

I. PENDAHULUAN

Penentuan kontrol optimal telah banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Salah satu contoh kontrol optimal sederhana adalah inverted pendulum. Inverted pendulum terdiri dari kereta dan pendulum yang terpasang pada kereta. Suatu gaya (force) diberikan pada sistem yang terdiri dari posisi sudut, kecepatan sudut, posisi kereta, dan kecepatan kereta. Fungsi objective dari inverted pendulum adalah meminimumkan sudut pendulum dan posisi kereta sesuai trayektori supaya pendulum stabil [1],[2].

Model kontrol optimal yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan Linear

Quadratic Regulator (LQR). Pada LQR, nilai dari performance index sebagai fungsi objective ditentukan oleh matriks bobot dan matriks bobot secara umum ditentukan secara trial and error sehingga perlu proses optimisasi. Dalam LQR, terdapat tiga matriks bobot yang akan dioptimisasi. Pada penelitian sebelumnya, masalah optimisasi matriks bobot pada kontrol optimal telah diteliti menggunakan Ant Colony Optimization (ACO) [3], Particle Swarm Optimization (PSO) [4], Artificial Bee Colony (ABC) [11].

Ant Colony Optimization (ACO) adalah metode optimisasi yang terinspirasi dari perilaku semut dalam mencari jalan dari sarang menuju sumber makanan. Metode ini ditemukan oleh Dorigo pada tahun 1990 [9].

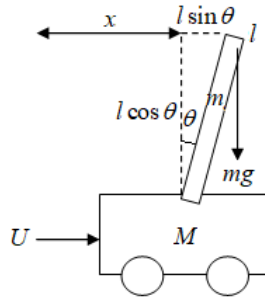
Proses optimisasi ACO adalah : semut berangkat dari sarang kemudian melakukan perjalanan melalui banyak titik dari layer pertama (sarang) menuju layer terakhir (sumber makanan) dan berhenti pada titik tujuan.

Hasil simulasi menunjukkan metode ACO dapat menemukan matriks bobot optimum yang meminimumkan performance index sebagai fungsi objective.

II. PEMODELAN MATEMATIKA INVERTED PENDULUM

Pemodelan pada inverted pendulum dapat dilihat pada Gambar 1, dimana parameter pada inverted pendulum yang akan digunakan adalah : massa kereta M ; massa

pendulum m ; panjang pendulum l ; percepatan gravitasi g . Suatu gaya (force) U diberikan pada sistem yang terdiri dari posisi sudut, kecepatan sudut, posisi kereta, dan kecepatan kereta. Fungsi objective dari inverted pendulum adalah meminimumkan sudut pendulum θ dan posisi kereta x sesuai trayektori supaya pendulum stabil [7].



Gambar 1: Model Inverted Pendulum

Misalkan koordinat (x, y) dari pusat gravitasi pendulum adalah (x_G, y_G) :

$$x_G = x + l \sin \theta \quad y_G = l \cos \theta \quad (1)$$

Pada pendulum terdapat tiga jenis gaya, yaitu gaya rotasi pendulum pada pusat gravitasi seperti pada persamaan (2), gaya horizontal pendulum pada pusat gravitasi seperti pada persamaan (3), dan gaya vertikal pendulum pada pusat gravitasi seperti pada persamaan (4).

$$I\ddot{\theta} = Vl \sin \theta - Hl \cos \theta \quad (2)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) = H \quad (3)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) = V - mg \quad (4)$$

Sedangkan pada kereta, terdapat gaya horizontal seperti pada persamaan (5).

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = U - H \quad (5)$$

Untuk mendapatkan sistem yang linier, dilakukan pelinearan $\sin \theta \approx \theta$ dan $\cos \theta \approx 1$ sehingga pada persamaan (2), (3), dan (4) menjadi seperti persamaan (6), (7), dan (8) berturut-turut.

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl \quad (6)$$

$$m(\ddot{x} + l\ddot{\theta}) = H \quad (7)$$

$$0 = V - mg \quad (8)$$

Substitusi persamaan (5) dan (7)

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = U \quad (9)$$

Substitusi persamaan (7) dan (8) pada persamaan (6)

$$I\ddot{\theta} = mgl\theta - (m\ddot{x} + ml\ddot{\theta})l \quad (10)$$

Dengan asumsi $I = 0$ maka pada persamaan (10) menjadi

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \quad (11)$$

Diperoleh model matematika pada inverted pendulum seperti pada persamaan (9) dan persamaan (11). Kedua persamaan tersebut dapat dimodifikasi menjadi :

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - U \quad (12)$$

$$M\ddot{x} = U - mg\theta \quad (13)$$

Dari persamaan (12) dengan memisalkan $x_1 = \theta$ dan $x_2 = \dot{\theta}$ dan dari persamaan (13) dengan memisalkan $x_3 = x$ dan $x_4 = \dot{x}$ menghasilkan bentuk state space :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{M+m}{Ml}\right)g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} U \quad (14)$$

III. LINEAR QUADRATIC REGULATOR

Linear Quadratic Regulator (LQR) bertujuan untuk menemukan kontrol optimal $u(t)$ yang akan memberikan solusi state $x(t)$ dari waktu awal menuju waktu akhir dengan meminimumkan performance index J . Bentuk LQR adalah sebagai berikut [5],[6]:

$$\text{State} \quad : \quad \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (15)$$

Dengan performance index J sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2}x(T)^T Px(T) + \frac{1}{2} \int_{t=0}^T [x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)] dt \quad (16)$$

dengan $P \geq 0$ dan $Q \geq 0$ yang bersifat simetris dan semidefinit positif, serta $R > 0$ yang bersifat simetris dan definit positif.

Perhitungan LQR d waktu kontinu adalah sebagai berikut :

1. Hitung solusi matriks Riccati

$$S(t) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t < T_f \quad \text{yang}$$

bersifat simetris semidefinit positif dan menggunakan Runge Kutta orde empat secara mundur. Karena terdapat sepuluh elemen matriks yang berbeda, maka terdapat sepuluh persamaan membentuk sistem persamaan diferensial.

$$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q, \quad S(T_f) = P \quad (17)$$

for $t = T_f : h$

$$n_{1i} = f_i(t, S_i(t)) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$n_{2i} = f_i\left(t - \frac{h}{2}, S_i(t) - \frac{h}{2}n_{1i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$n_{3i} = f_i\left(t - \frac{h}{2}, S_i(t) - \frac{h}{2}n_{2i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$n_{4i} = f_i\left(t - h, S_i(t) - hn_{3i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$S_i(t - h) = S_i(t) - \frac{h}{6}(n_{1i} + 2n_{2i} + 2n_{3i} + n_{4i}) \quad ,$$

$$i = 1, 2, \dots, 10$$

end

2. Hitung optimal feedback gain

$$K(t) = R^{-1}B^T S(t) \quad (18)$$

3. Hitung solusi persamaan state

$$\dot{x} = (A - BK(t))x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (19)$$

for $t = 0 : T_f - h$

$$n_{1i} = f_i(t, x_i(t), K_i(t)) \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$n_{2i} = f_i\left(t + \frac{h}{2}, x_i(t) + \frac{h}{2}n_{1i}, \frac{K_i(t) + K_i(t+h)}{2}\right),$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$n_{3i} = f_i\left(t + \frac{h}{2}, x_i(t) + \frac{h}{2}n_{2i}, \frac{K_i(t) + K_i(t+h)}{2}\right),$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$n_{4i} = f_i\left(t + h, x_i(t) + hn_{3i}, K_i(t+h)\right),$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$x_i(t+h) = x_i(t) + \frac{h}{6}(n_{1i} + 2n_{2i} + 2n_{3i} + n_{4i}) \quad ,$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

End

4. Hitung optimal kontrol

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (20)$$

5. Hitung performance index secara diskrit sebagai nilai objective

$$J = \frac{1}{2}x(T)^T Px(T) + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T-1} [x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)] dt \quad (21)$$

IV. ANT COLONY OPTIMIZATION

Ant Colony Optimization (ACO) adalah metode optimisasi yang terinspirasi dari perilaku semut dalam mencari jalan dari sarang menuju sumber makanan. Metode ini ditemukan oleh Dorigo pada tahun 1990.

Proses optimisasi ACO adalah : semut berangkat dari sarang kemudian melakukan perjalanan melalui banyak titik dari layer pertama (sarang) menuju layer terakhir (sumber makanan) dan berhenti pada titik tujuan.

Pada awal iterasi, semua jalan diinisialisasi dengan jejak pheromone dalam jumlah yang sama. Pada solusi optimal, semua semut akan berjalan pada jalan yang sama dengan jejak pheromone yang tinggi.

A. Perilaku pada Semut

Terdapat tiga langkah pada algoritma ACO yaitu : perilaku pencarian pada semut, proses penguapan pada jejak pheromone, dan pelacakan jalan dan update jejak pheromone [8],[10].

1. Perilaku Pencarian pada Semut

Seekor semut k , ketika berlokasi di titik i , mengeluarkan jejak pheromone τ_{ij} untuk menghitung peluang memilih j sebagai titik berikutnya.

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha}{\sum_{j \in N_i^{(k)}} \tau_{ij}^\alpha} & \text{if } j \in N_i^{(k)} \\ 0 & \text{if } j \notin N_i^{(k)} \end{cases} \quad (22)$$

dengan α adalah tingkat kepentingan dari jejak pheromone dan $N_i^{(k)}$ adalah titik yang saling bertetangga dari semut k ketika di titik i .

2. Proses Penguapan pada Jejak Pheromone

Ketika seekor semut k berpindah ke titik berikutnya, jejak pheromone menguap.

$$\tau_{ij} \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij} \quad (23)$$

dengan $\rho \in (0,1]$

Ketika semua semut kembali ke sarang, jejak pheromone diupdate karena penguapan.

$$\tau_{ij} \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij} + \sum_{k=1}^N \Delta\tau_{ij}^{(k)} \quad (24)$$

dengan $\rho \in (0,1]$ adalah laju penguapan jejak pheromone dan $\Delta\tau^{(k)}$ adalah jumlah pheromone yang diletakkan oleh semut terbaik k dengan persamaan (25)

$$\sum \Delta\tau_{ij}^{(k)} = \begin{cases} N_{best} \cdot \frac{Q}{f_{best}}, & \text{jika } (i,j) \text{ terbaik} \\ 0, & \text{yang lain} \end{cases} \quad (25)$$

dengan Q adalah konstant.

3. Pelacakan Jalan dan Update Jejak Pheromone

Jejak pheromone τ_{ij} diupdate. Jejak pheromone yang tinggi memiliki peluang yang tinggi dipilih oleh semut pada waktu berikutnya.

B. Optimisasi ACO pada LQR

Dalam LQR, terdapat tiga matriks bobot yang akan dioptimisasi menggunakan ACO yaitu : $P \geq 0$ dan $Q \geq 0$ yang bersifat simetris dan semidefinit positif, serta $R > 0$ yang bersifat simetris dan definit positif. Dengan mengasumsikan $P = 0$ dan

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

karena akan meminimumkan posisi sudut pendulum x_1 dan posisi kereta x_3 , maka terdapat tiga variabel sebagai variabel keputusan. Suatu jalan pada ACO sebagai variabel keputusan dapat direpresentasikan sebagai berikut :

$$X = [q_{11} \quad q_{33} \quad R] \quad (26)$$

dengan nilai fitness adalah performance index sebagai fungsi objective pada persamaan (21).

Algoritma untuk mengoptimisasi matriks bobot pada LQR menggunakan ACO dapat dikonstruksi sebagai berikut :

1. Tentukan jumlah semut N dan laju penguapan jejak pheromone ρ .
2. Bangkitkan M populasi matriks bobot pada persamaan (27) sebagai jalan dan hitung peluang menggunakan persamaan

$$p(X_i) = \frac{1}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (27)$$

3. Hitung peluang kumulative pada range C_i
4. Bangkitkan bilangan acak pada setiap semut $r_s \sim U(0,1)$ $s = 1, 2, \dots, N$.
5. Tentukan matriks bobot sebagai jalan yang terpilih $X_i, i \in \{1, 2, \dots, M\}$ pada setiap semut s .

6. Hitung nilai objective pada setiap semut s .
7. Pilih nilai objective yang paling kecil $f_{best} = \min(f(X_i), i \in \{1, 2, \dots, M\})$, dan hitung N_{best} , yaitu jumlah dari f_{best}
8. Tentukan Q dan hitung $\sum \Delta\tau(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, M$

$$\sum \Delta\tau(X_i) = \begin{cases} N_{best} \cdot \frac{Q}{f_{best}}, & \text{jika } X_i \text{ terbaik} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (28)$$

9. Update jejak pheromone

$$\tau_i = (1 - \rho)\tau_i + \sum \Delta\tau(X_i) \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (29)$$

10. Update peluang dari jejak pheromone

$$p(X_i) = \frac{\tau_i}{\sum \tau_i} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (30)$$

11. Ulangi langkah 3-10 sampai semua semut memilih matriks bobot sebagai jalan yang sama sehingga proses konvergen.

V. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada ACO, populasi jalan adalah elemen dari matriks bobot dan nilai fitness yang digunakan adalah performance index dari model LQR dengan waktu diskrit. Setelah elemen matriks bobot optimal diperoleh, dilakukan simulasi LQR menggunakan waktu kontinu.

Parameter pada inverted pendulum yang akan digunakan pada simulasi LQR adalah : massa kereta $M = 0,5$; massa pendulum $m = 0,2$; panjang pendulum $l = 0,6$; percepatan gravitasi $g = 9,81$. Pada simulasi Runge Kutta orde empat digunakan nilai awal $x(0) = [5 \ 2 \ 3 \ 6]^T$; beda $h = 0,1$; waktu akhir $T_f = 10$.

Parameter ACO yang digunakan adalah :

Jumlah populasi jalan $M : 1000$

Jumlah semut $N : 5$

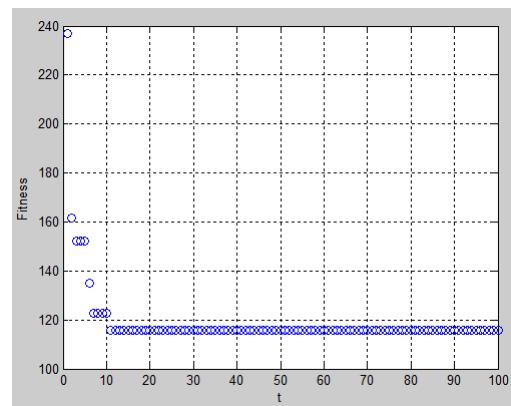
Laju penguapan $\rho : 0,1$

Gambar 2 adalah proses optimisasi dari ACO pada pencarian matriks bobot dari LQR inverted pendulum yang optimal. Pada iterasi awal, semua semut memilih matriks bobot secara acak. Pada proses optimisasi, jejak pheromone diupdate karena penguapan sampai semua semut memilih matriks bobot yang optimal. Setelah ACO diterapkan sampai iterasi maksimum, diperoleh pendekatan matriks bobot yang optimal adalah

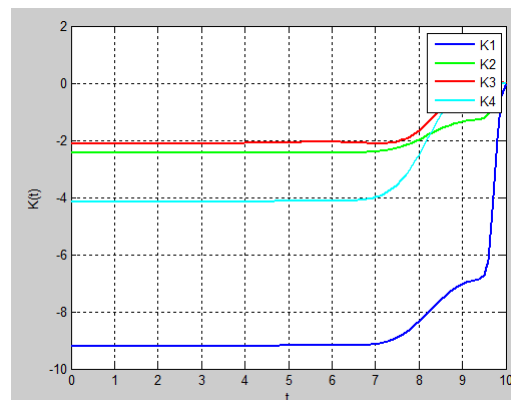
$$q_{11} = 2,195, \quad q_{33} = 1,024, \quad R = 0,229.$$

dengan nilai performance index adalah 115,962.

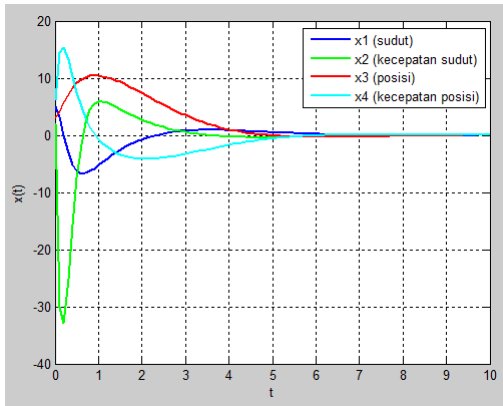
Gambar 3 adalah solusi dari optimal feedback gain yang diperoleh dari persamaan (18). Gambar 4 adalah solusi persamaan state yaitu sudut pendulum, kecepatan sudut pendulum, posisi kereta, dan kecepatan posisi kereta. Gambar 5 adalah kontrol optimal yang diperoleh.



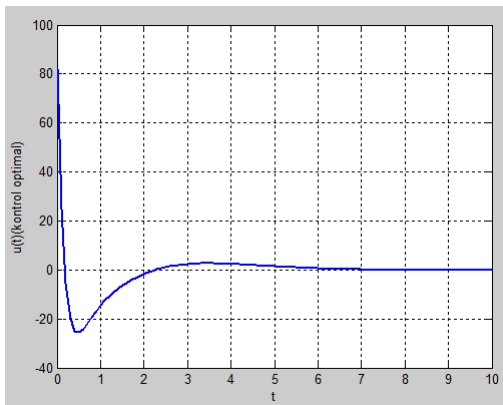
Gambar 2: Proses Optimisasi pada ACO



Gambar 3: Optimal Feedback Gain



Gambar 4: Solusi Persamaan State



Gambar 5: Kontrol Optimal

VI. KESIMPULAN

Pada LQR, nilai dari fungsi objective ditentukan oleh matriks bobot. Matriks bobot secara umum ditentukan secara trial and error sehingga perlu proses optimisasi. Pada penelitian ini optimisasi matriks bobot dilakukan menggunakan metode ACO. Hasil simulasi menunjukkan metode ACO dapat menemukan matriks bobot optimum yang meminimumkan performance index sebagai fungsi objective.

REFERENSI

- [1] Hassani, K., Lee, W.S., "Optimal Tuning of Linear Quadratic Regulators Using Quantum Particle Swarm Optimization," *Proceedings of the Int. Conference of Control, Dynamic System, and Robotics*, (Canada), pp. 59(1-8), 2014.
- [2] Karthick, S., Jerome, J., "APSO Based Weighting Matrices Selection of LQR Applied to Tracking Control of SIMO System," *Proceedings of 3rd International Conference on Advanced Computing, Networking and Informatics, Smart*

- Innovation, Systems and Technologies*, (India), pp. 11-20, 2016.
- [3] Rahmalia, D., Herlambang, T., "Application Ant Colony Optimization on Weight Selection of Optimal Control SEIR Epidemic Model," *Proceeding The 7th Annual Basic Science International Conference*, (Malang), pp. 196–199, 2017.
- [4] Herlambang, T., Rahmalia, D., Yulianto, T., "Particle Swarm Optimization (PSO) and Ant Colony Optimization (ACO) for Optimizing PID Parameters on Autonomous Underwater Vehicle (AUV) Control System," *Journal of Physics : Conference Series*, (Jember), 2019.
- [5] Lewis, F.L., Vrabie, D.L., Syrmos, V.L., *Optimal Control*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2012.
- [6] Naidu, D.S., *Optimal Control System*. Florida: CRC Press, 2003.
- [7] Ogata, K., *Modern Control Engineering*. New Jersey: Prentice Hall, 2002.
- [8] Rao, S.S., *Engineering Optimization Theory and Practice*. New Jersey: John Wiley and Sons, 2009.
- [9] Dorigo, M., Stutzle, T., *Ant Colony Optimization*. London: The MIT Press, 2004
- [10] Rahmalia, D., "Estimation of Exponential Smoothing Parameter on Pesticide Characteristic Forecast Using Ant Colony Optimization (ACO)," *Eksakta: Jurnal Ilmu-Ilmu MIPA, UII Yogyakarta*, vol. 18, no. 1, pp. 56–63, 2018.
- [11] Rahmalia, D., Herlambang, T., "Weight Optimization of Optimal Control Influenza Model Using Artificial Bee Colony," *International Journal of Computing Science and Applied Mathematics, ITS Surabaya*, vol. 4, no. 1, pp. 27-31, 2018.