Vol. 6, No. 1 (2024), pp. 11-16
p-ISSN 2656-6303 – e-ISSN 2656-9876
URL:http://journal.unirow.ac.id/index.php/mv

MENENTUKAN INVERS DRAZIN DENGAN TEOREMA CAYLEY HAMILTON

Nora Yoshinta Sigalingging[1*], Fransiskus Fran[2], Nilamsari Kusumastuti[3]
Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Tanjungpura[1,2,3]
norayoshinta.s@student.untan.ac.id[*]

***Abstrak*– Setiap matriks tidak selalu memiliki invers. Matriks yang memiliki invers disebut matriks non-singular dan matriks yang tidak memiliki invers disebut matriks singular. Tetapi, matriks singular dapat ditentukan invers tergeneralisasinya. Invers tergeneralisasi adalah konsep aljabar linear yang digunakan dalam menentukan invers dari matriks singular. Salah satu invers tergeneralisasi yaitu invers Drazin dari suatu matriks singular C dilambangkan C^D. Pada penelitian ini membahas cara menentukan invers Drazin yang merupakan salah satu invers tergeneralisasi dengan teorema Cayley Hamilton. Langkah-langkah untuk menentukan invers Drazin menggunakan teorema Cayley Hamilton, dimulai dengan mencari indeks suatu matriks singular C. Indeks suatu matriks merupakan bilangan bulat non-negatif terkecil p yang memenuhi kondisi $rank(C^p) = rank(C^{p+1})$. Selanjutnya, dengan diperoleh indeks matriks dapat ditentukan matriks A dan M dengan menggunakan koefisien polinomial karakteristik dari matriks C. Matriks A adalah matriks yang diperoleh dari $a_{p+1}C^p + a_pC^{p-1} + \cdots + a_2C + a_1I_n$ dan M adalah matriks yang diperoleh *dari* $-C^{n-2} - a_{n-1}C^{n-3} - \cdots - a_{p+2}C^p$. Untuk menentukan invers Drazin dapat dihitung dengan $C^D = A^{-1}M$.**

Kata Kunci – Invers Drazin, Teorema Cayley Hamilton, Invers Tergeneralisasi, invers matriks singular, matriks $n \times n$.

I. PENDAHULUAN

Invers matriks merupakan salah satu konsep penting dalam aljabar linear. Invers matriks digunakan untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam matematika, fisika, teknik dan bidang ilmu lainnya seperti menyelesaikan sistem persamaan linear, perhitungan kinematika dan dinamika partikel, perhitungan stuktur bangunan dan jembatan, pengelolaan sinyal dan lain sebagainya. Namun, perlu diperhatikan bahwa tidak semua matriks memiliki invers. Tetapi, matriks singular dapat ditentukan invers tergeneralisasinya [1]. Matriks yang memiliki invers disebut matriks non-singular dan matriks yang tidak memiliki invers disebut matriks singular. Matriks singular memiliki determinan nol dan tidak dapat diselesaikan inversnya dengan metode invers biasa.

Invers tergeneralisasi terbagi dalam beberapa jenis, diantaranya adalah invers Moore-Penrose [2], invers satu sisi [3], invers Bott-Duffin [4] dan invers Drazin. Invers Drazin pertama kali diperkenalkan oleh Michael P Drazin pada tahun 1985. Pengaplikasian invers Drazin dapat digunakan pada rantai Markov, kriptografi dan sistem persamaan linear [5]. Ada beberapa metode yang digunakan untuk menentukan menentukan invers Drazin, diantaranya metode Leverrier Faddev [6], metode semi iterative tipe BI-CG [7], bentuk kanonik Jordan [5] dan teorema Cayley Hamilton [8]. Penelitian ini menganalisis

Bidang Penelitian :
Tanggal Masuk: 18–01-2024; Revisi: 04-03-2024
Diterima: 19-03-2024

cara menentukan invers Drazin dengan teorema Cayley Hamilton.

Untuk menentukan invers Drazin dengan teorema Cayley Hamilton dapat dilakukan dengan memenuhi beberapa kondisi khusus [9]. Invers Drazin dari matriks C berordo $n \times n$ atas C diperoleh dengan menentukan nilai karakteristik dari matriks A dan multiplisitas aljabar dari masing-masing nilai karakteristik [5]. Adapun langkah-langkah dalam menentukan matriks invers Drazin dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton yaitu langkah pertama, dicari indeks p dari suatu matriks yang memenuhi kondisi bahwa $rank(C^p) = rank(C^{p+1})$ dengan $p \leq n-1$. Langkah selanjutnya, menentukan koefisien a_k pada polinomial karakteristik dari matriks C. Setelah itu, mencari matriks A. Kemudian, menentukan koefisien b_k pada polinomial karakteristik dari matriks A. Selanjutnya, menentukan invers matriks A^{-1} dengan teorema Cayley Hamilton. Setelah itu, menentukan matriks M. Langkah terakhir adalah menentukan matriks invers Drazin C^D [9].

II. LANDASAN TEORI

Berikut teori-teori pendukung dalam pembahasan menentukan matriks Invers Drazin dengan Teorema Cayley Hamilton.

II.1 Invers Matriks

Definisi II.1 [10] Diberikan A matriks $n \times n$ dan jika terdapat matriks B $n \times n$ yang memenuhi $AB = BA = I$, maka matriks A disebut *invertible* dan B disebut sebagai invers dari A.

II.2 Rank dan Nulitas

Definisi II.2 [11] Rank dari suatu matriks berordo $n \times n$ adalah jumlah maksimum dari vektor baris atau vektor kolom yang bebas linear. Rank dari suatu matriks merupakan dimensi dari vektor baris atau vektor kolom non-zero pada matriks tersebut.

Definisi II.3 [11] Nulitas adalah dimensi dari ruang nol *(nullspace)* pada suatu matriks. Ruang nol adalah himpunan semua vektor kolom x yang memenuhi persamaan homogen $Ax = 0$. Nulitas dinyatakan oleh $null(A)$.

Teorema II.4 [10] Diberikan matriks A adalah suatu matriks dengan n kolom, maka $rank(A) + nulitas(A) = n$.

II.3 Perpangkatan Matriks

Definisi II.5 [11] Diberikan A adalah sebuah matriks persegi, maka pangkat bilangan bulat (n) dimana $n > 0$ dari A adalah sebagai berikut:
(1) $A^0 = I$
(2) $A^n = A.A.A \dots .A$, dimana A sebanyak n.
(3) Jika A punya invers, $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

II.4 Teorema Cayley Hamilton

Teorema II.6 [12] Setiap matriks persegi $n \times n$ memenuhi persamaan karakteristiknya

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0.$$

Teorema II.7 [8] Jika persamaan karakteristik dari matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memiliki bentuk

$$de\,t[\lambda I - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

dan matriks A punya invers, maka invers dari matriks A memenuhi persamaan

$$a_0(A^{-1})^n + a_1(A^{-1})^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A^{-1} + I_n = a_0A^{-n} + a_1A^{1-n} + \cdots + a_{n-1}A^{-1} + I_n = 0$$

III. PEMBAHASAN

Berikut akan dibahas mengenai invers Drazin, teorema Cayley Hamilton pada invers Drazin, serta bagaimana menentukan invers Drazin dari suatu matriks dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton.

III.1 Invers Drazin

Definisi III.1 [13] Diberikan matriks $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dengan mengatakan bilangan bulat non-negatif p disebut indeks dari matriks C jika memenuhi $rank(C^p) = rank(C^{p+1})$.

Teorema III.2 [14] Diberikan matriks $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Jika matriks C merupakan matriks non singular maka indeks dari matriks C adalah 0.

Definisi III.3 [15] Diberikan matriks $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, C^D disebut invers Drazin dari C jika memenuhi kondisi-kondisi berikut:
(1) $CC^D = C^D C$
(2) $C^D C C^D = C^D$
(3) $C^{p+1}C^D = C^p$, dimana p adalah indeks matriks C.

Adapun teorema yang menunjukkan sifat-sifat invers Drazin adalah:
Teorema III.4 [5] Diberikan matriks $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ adalah matriks non singular. Matriks C^D merupakan invers Drazin dari matriks C jika dan hanya jika matriks C^{-1} merupakan invers dari C.

Pada tahun 2003, Israel dan Greville telah menunjukkan bahwa invers Drazin dari suatu matriks adalah tunggal. Misalkan matriks A dan matriks B adalah invers Drazin dari matriks C. Maka, dengan menggunakan Definisi III.3.
$A = ACA = ACACA = ACACACA = \cdots =$
$A(CA)^p = A^{p+1}C^p$
Kemudian, mengalikan $A^{p+1}C^p$ dengan (BC) sampai $(BC)^{p+1}$
$A = A^{p+1}(BC)C^p = A^{p+1}(BCBC)C^p = \cdots =$
$A^{p+1}(BC)^{p+1}C^p$
$= B^{p+1}C^{2p+1}A^{p+1}$
$= B^{p+1}C^p(AC)^{p+1} = B^{p+1}C^p(AC)$
$= B^{p+1}C^p = (BC)^p B = \cdots = BCBCB =$
$BCB = B$

III.2 Teorema Cayley Hamilton Pada Invers Drazin

Suatu matriks dapat mempunyai invers atau tidak berdasarkan persamaan karakteristiknya. Teorema Cayley Hamilton dapat digunakan unutk menentukan invers matriks yang digunakan ke invers Drazinnya. Akan ditunjukkan teorema tentang teorema Cayley Hamilton.
Teorema III.5 [9] Misalkan
$$de\,t[\lambda I - C] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda \quad (1)$$
Dimana $C^D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ adalah invers Drazin pada matriks C, maka persamaan karakteristiknya
$(C^D)^n + a_{n-1}(C^D)^{n-1} + \cdots + a_2(C^D)^2$
$+a_1C^D = 0$
BUKTI.
Pada persamaan (1) peubah fungsi λ disubstitusi dengan matriks C diperolehlah persamaan karakteristik pada matriks C
$$C^n + a_{n-1}C^{n-1} + \cdots + a_2C^2 + a_1C = 0$$
Selanjutnya, mengalikan sebelum dan sesudah persamaan dengan matriks invers Drazin C^D sehingga didapatlah
$C^DC^nC^D + C^Da_{n-1}C^{n-1}C^D + \cdots +$
$C^Da_2C^2C^D + C^Da_1CC^D = 0 \quad (2)$
Pada Definisi III.3 diketahui bahwa
$$C^DCC^D = C^D$$
$$CC^D = C^D\,C$$
Karena
$C^DC^kC^D = C^DCC^DC^{k-1} = C^DC^{k-1} \quad (3)$
Sehingga pada Persamaan (2) dengan menggunakan Persamaan (3) diperoleh
$C^DCC^DC^{n-1} + C^DCC^Da_{n-1}C^{n-2} + \cdots +$
$C^DCC^Da_2C + C^DCC^Da_1 = 0$
$(C^DCC^D)C^{n-1} + (C^DCC^D)a_{n-1}C^{n-2} + \cdots +$
$(C^DCC^D)a_2C + (C^DCC^D)a_1 = 0$
$C^DC^{n-1} + C^Da_{n-1}C^{n-2} + \cdots + C^Da_2C +$
$C^Da_1 = 0 \quad (4)$
Kemudian mengalikan Persamaan (4) dengan $(C)^D$
$C^DC^{n-1}C^D + C^Da_{n-1}C^{n-2}C^D + \cdots +$
$C^Da_2CC^D + C^Da_1C^D = 0$
$(C^DCC^D)C^{n-2} + (C^DCC^D)a_{n-1}C^{n-3} + \cdots +$
$(C^DCC^D)a_2 + (C^DC^D)a_1 = 0$
$C^DC^{n-2} + C^Da_{n-1}C^{n-3} + \cdots + C^Da_2$
$+(C^D)^2 = 0$
Dengan mengulangi sebanyak $n-2$ kali, sehingga akan memperoleh
$(C^D)^n + a_{n-1}(C^D)^{n-1} + \cdots + a_2(C^D)^2 +$
$a_1C^D = 0$ ■

III.3 Menentukan Invers Drazin Suatu Matriks

Diberikan suatu matriks singular $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dengan indeks p memenuhi kondisi
$$p \le n-1$$
dan persamaan karakteristiknya
$de\,t[\lambda I - C] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2$
$+a_1\lambda \quad (5)$
Selanjutnya Persamaan (5) dikalikan dengan $(C^D)^2$, C^D adalah invers Drazin dari matriks C, didapat

$C^n(C^D)^2 + a_{n-1}C^{n-1}(C^D)^2 + \cdots + a_2C^2(C^D)^2 + a_1C(C^D)^2 = 0$
$\Leftrightarrow C^{n-1}C^D + a_{n-1}C^{n-2}C^D + \cdots + a_2CC^D + a_1C^D = 0$ (6)

Dengan menggunakan Definisi III pada poin (3) dimana $C^{p+1}C^D = C^p$, sehingga diperoleh sebagai berikut.

$C^{n-2} + a_{n-1}C^{n-3} + \cdots + a_2CC^D + a_1C^D$
$\Leftrightarrow C^{n-2} + a_{n-1}C^{n-3} + a_{n-2}C^{n-4} + a_{n-3}C^{n-5} + \cdots + a_{n-p+2}C^{n-p} + a_{n-p+1}C^{n-p-1} + a_{n-p}C^{n-p-2} + a_{n-p-1}C^{n-p-3} + \cdots + a_{p+2}C^p + \left(a_{p+1}C^p + a_pC^{p-1} + a_{p-1}C^{p-2} + \cdots + a_2C + a_1I_n\right)C^D = 0$

Misalkan

$-M = C^{n-2} + a_{n-1}C^{n-3} + \cdots + a_{p+2}\,C^p$
$M = -\left(C^{n-2} + a_{n-1}C^{n-3} + \cdots + a_{p+2}\,p\right)$
$= -C^{n-2} - a_{n-1}C^{n-3} - \cdots - a_{p+2}\,C^p$
$A = a_{p+1}C^p + a_pC^{p-1} + \cdots + a_2C + a_1I_n$

Dimisalkan $det\,(A) \neq 0$, maka matriks A memiliki invers.

$$-M + AC^D = 0$$
$$AC^D = M$$
$$C^D = A^{-1}M$$

langkah-langkah secara lengkap dalam mencari invers Drazin menurut penelitian [9] adalah sebagai berikut:

(i). Dicari nilai p pada matriks C yang memenuhi $rank(C^p) = rank(C^{p+1})$.

(ii).Menentukan koefisien a_k dari polinomial karakteristik pada matriks C, dimana persamaan karakteristik matriks C adalah
$de\,t[\lambda I - C] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda$
dengan $k = 0,1,2,3,\dots,n-1$.

(iii).Menentukan matriks A dengan $de\,t(A) \neq 0$
$A = a_{p+1}C^p + a_pC^{p-1} + \cdots + a_2C + a_1I_n$.

(iv).Menentukan koefisien b_k dari polinomial karakteristik pada matriks A, dimana persamaan karakteristik matriks A adalah
$de\,t[\lambda I - A] = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_2\lambda^2 + b_1\lambda$
dengan $k = 0,1,2,3,\dots n-1$.

(v).Menentukan matriks A^{-1} dengan teorema Cayley Hamilton

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0}A^{n-1} - \frac{b_{n-1}}{b_0}A^{n-2} - \cdots - \frac{b_2}{b_0}A - \frac{b_1}{b_0}I_n.$$

(vi). Menentukan matriks M
$M = -C^{n-2} - a_{n-1}C^{n-3} - \cdots - a_{p+2}C^p$.

(vii).Menentukan matriks invers Drazin C^D, dengan $C^D = A^{-1}\,M$.

Contoh III.6 Diberikan suatu matriks singular C berordo 3×3

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers Drazin dari matriks C.

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $det\,(C) = 0$.

Langkah 1 Akan dicari nilai p yang memenuhi kondisi $rank(C^p) = rank(C^{p+1})$

Dimisalkan nilai p adalah 1.

$$rank(C) = rank(C^2)$$

Karena memenuhi maka indeks $p = 1$.

Langkah 2 Menentukan polinomial karakteristik dari matriks C.

$$det\,(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 - \lambda$$

Didapatlah $a_2 = a_0 = 0, a_1 = -1$

Langkah 3 Menentukan matriks A

Dengan $p = 1, a_0 = 0, a_1 = 2$ dan $a_2 = -3$ maka

$A = a_{p+1}C^p + a_pC^{p-1} + \cdots + a_2C + a_1I_n$
$A = a_1I_3$
$= -1I_3$

$$= -1\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Diketahui $det\,(A) = -1 \neq 0$.

Langkah 4 Menentukan polinomial karakteristik dari matriks A

$$det\,(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0\\ 0 & \lambda+1\end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$$

Didapatlah $b_0 = 1, b_1 = b_2 = 3$

Langkah 5 Menentukan A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0}A^{n-1} - \frac{b_{n-1}}{b_0}A^{n-2} - \cdots - \frac{b_2}{b_0}A - \frac{b_1}{b_0}I_n$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0}A^2 - \frac{b_2}{b_0}A - \frac{b_1}{b_0}I_3$$

$$= -1\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Langkah 6 Menentukan matriks M

$$M = -C^{n-2} - a_{n-1}C^{n-3} - \cdots - a_{p+2}C^p$$

$$M = -C = -\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

Langkah 7 Menentukan matriks invers Drazin

$$C^D = A^{-1}M$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

Sehingga, diperoleh matriks invers Drazin dari matriks C adalah $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

Contoh III.7 Diberikan suatu matriks singular C berordo 3×3

$$C = \begin{bmatrix}1 & 1-i & 0\\ 1+i & 3 & 0\\ 2 & -i & 0\end{bmatrix}$$

Tentukan invers Drazin dari matriks C.

Penyelesaian:

Diketahui bahwa $det\ (C) = 0$

Langkah 1 Akan dicari nilai p yang memenuhi kondisi $rank(C^p) = rank(C^{p+1})$

Dimisalkan nilai p adalah 1

$$rank(C) = rank(C^2)$$

Karena memenuhi maka indeks $p = 1$.

Langkah 2 Menentukan polinomial karakteristik dari matriks C.

$$det\ (\lambda I - C) = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1+i & 0\\ -1-i & \lambda-3 & 0\\ -2 & i & \lambda\end{vmatrix}$$
$$= (\lambda)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1+i\\ -1-i & \lambda-3\end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda$$

Didapatlah $a_2 = -4, a_1 = 1$ dan $a_0 = 0$

Langkah 3 Menentukan matriks A

Dengan $p = 1, a_0 = 0, a_1 = 1$ dan $a_2 = -4$ maka

$$A = a_{p+1}C^p + a_pC^{p-1} + \cdots + a_2C + a_1I_n$$
$$A = a_2C + a_1I_3$$
$$= -4C + 1I_3$$
$$= -4\begin{bmatrix}1 & 1-i & 0\\ 1+i & 3 & 0\\ 2 & -i & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-3 & -4+4i & 0\\ -4-4i & -11 & 0\\ -8 & 4i & 1\end{bmatrix}$$

Diketahui $det\ (A) = 1 \neq 0$.

Langkah 4 Menentukan polinomial karakteristik dari matriks A

$$det\ (\lambda I - A) = \begin{vmatrix}\lambda+3 & 4-4i & 0\\ 4+4i & \lambda+11 & 0\\ 8 & -4i & \lambda-1\end{vmatrix}$$
$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+3 & 4-4i\\ 4+4i & \lambda+11\end{vmatrix}$$
$$= \lambda^3 + 13\lambda^2 - 13\lambda - 1$$

Didapatlah $b_0 = -1, b_1 = -13$ dan $b_2 = 13$

Langkah 5 Menentukan A^{-1}

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0}A^{n-1} - \frac{b_{n-1}}{b_0}A^{n-2} - \cdots - \frac{b_2}{b_0}A - \frac{b_1}{b_0}I_n$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0}A^2 - \frac{b_2}{b_0}A - \frac{b_1}{b_0}I_3$$

$$= 1\begin{bmatrix}-3 & -4+4i & 0\\ -4-4i & -11 & 0\\ -8 & 4i & 1\end{bmatrix}^2 + 13\begin{bmatrix}-3 & -4+4i & 0\\ -4-4i & -11 & 0\\ -8 & 4i & 1\end{bmatrix} - 13\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 4-4i & 0 \\ 4+4i & -3 & 0 \\ -72-16i & 32-20i & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 6 Menentukan matriks M

$$M = -C^{n-2} - a_{n-1}C^{n-3} - \cdots - a_{p+2}C^{p}$$

$$M = -C = -\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 0 \\ 1+i & 3 & 0 \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1+i & 0 \\ -1-i & -3 & 0 \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah 7 Menentukan matriks invers Drazin

$$C^{D} = A^{-1}M$$

$$= \begin{bmatrix} -11 & 4-4i & 0 \\ 4+4i & -3 & 0 \\ -72-16i & 32-20i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1+i & 0 \\ -1-i & -3 & 0 \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1+i & 0 \\ -1-i & 1 & 0 \\ 18+4i & -8+5i & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga, diperoleh matriks invers Drazin dari matriks C adalah $\begin{bmatrix} 3 & -1+i & 0 \\ -1-i & 1 & 0 \\ 18+4i & -8+5i & 0 \end{bmatrix}$.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, maka diperoleh kesimpulan bahwa invers dari matriks singular dapat ditentukan dengan menentukan invers Drazin menggunakan Teorema Cayley Hamilton dengan memenuhi kondisi $p \leq n-1$.

REFERENSI

[1] L. Khasanah and B. Irwanto, "Menentukan Invers Drazin Dari Matriks Singular," *Jurnal Matematika,* vol. 14, no. 3, pp. 137-142, 2011.

[2] M. N. Hijriati and T. , "Invers Tergeneralisasi Moore-Penrose," *Jurnal Epsilon,* pp. 78-92, 2021.

[3] M. P. Drazin, "Left And Right Generalized Inverses," *Linear Algebra And Its Applications,* vol. 510, no. 1, pp. 64-78, 2016.

[4] B. Israel, "Generalized Inverses And The Bott-Duffin Network Anaysis," *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* vol. 7, no. 1, pp. 428-435, 1963.

[5] E. Sulistyono, S. Martha and E. W. Ramadhani, "Invers Drazin dari Suatu Matriks dengan Menggunakan Bentuk Kanonik Jordan," *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (Bimaster),* vol. 5, no. 3, pp. 221-228, 2016.

[6] S. and I. Suryani, "Menentukan Invers Drazin Dari Matriks Singular Dengan Metode Leverrier Faddeev," *Buletin Ilmiah Math. Stat. dan Terapannya (BIMASTER),* vol. 1, no. 1, pp. 27-38, 2015.

[7] A. Sidi and V. Kluzner, "A BIG-CG Type Iterative Method For Drazin-Inverse Solution Of Singular Inconsistent Nonsymmetric Linear Systems Of Arbitary Index," *The Electronic Journal Of Linear Algebra,* vol. 6, no. 1, pp. 72-94, 2015.

[8] T. Kaczorek, "Cayley-Hamilton theorem for Drazin inverse matrix and standard inverse matrices," *Bulletin of The Polish Academy of Sciences Technical Sciences,* vol. 64, no. 4, pp. 793-797, 2016.

[9] T. Kaczorek, "Extension of Cayley-Hamilton theorem and a procedure for computation of the Drazin inverse matrices," *IEEE,* pp. 70-72, 21 9 2017.

[10] H. Anton and C. Rorres, Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Edisi Kedelapan Jilid 1, Jakarta: Erlangga, 2004.

[11] Ruminta, Matriks Persamaan Linier dan Pemograman Linier Edisi Revisi, Bandung: REKAYASA SAINS, 2014.

[12] S. Lipschutz and M. Lipson, Schaum's Outlines Aljabar Linear Edisi Ketiga, Jakarta: Erlangga, 2004.

[13] L. Zhang, "A characterization of the Drazin inverse," *Linear Algebra and its Applications,* pp. 183-188, 2001.

[14] M. Nikuie, M. K. Mirnia and Y. Mahmoudi, "Some results about the index of matrix and Drazin inverse," *Mathematical Sciences,* vol. 4, no. 3, pp. 283-294, 2010.

[15] J. E. Gentle, Matrix Algebra Theory, Computations and Applications iin Statistics Second Edition, USA: Springer International, 2017.